

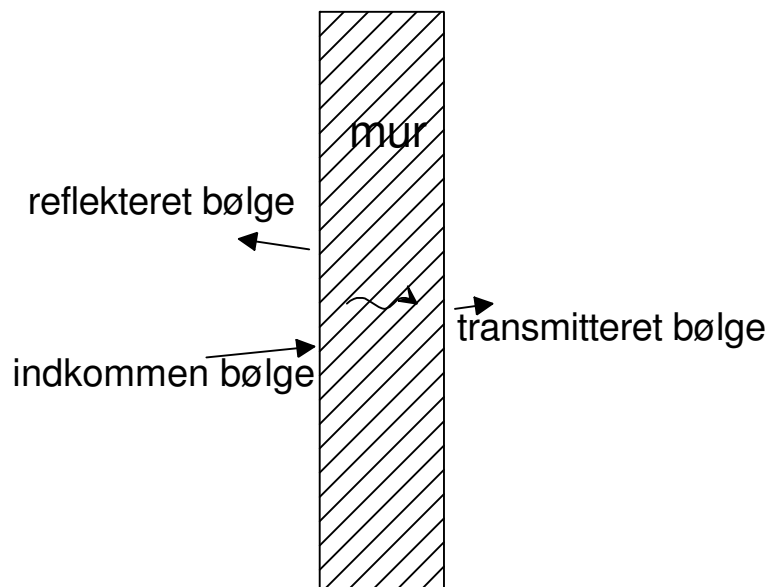
Fononiske Båndgab

Køreplan

01001 Mat 1b. Forår 2024

1 Baggrund

Bølgeudbredelse i materialer og medier (som f.eks. luft) er et fænomen, der kendes af alle og som observeres i forskellige former i dagligdagen, som f.eks. udbredelsen af lydbølger.

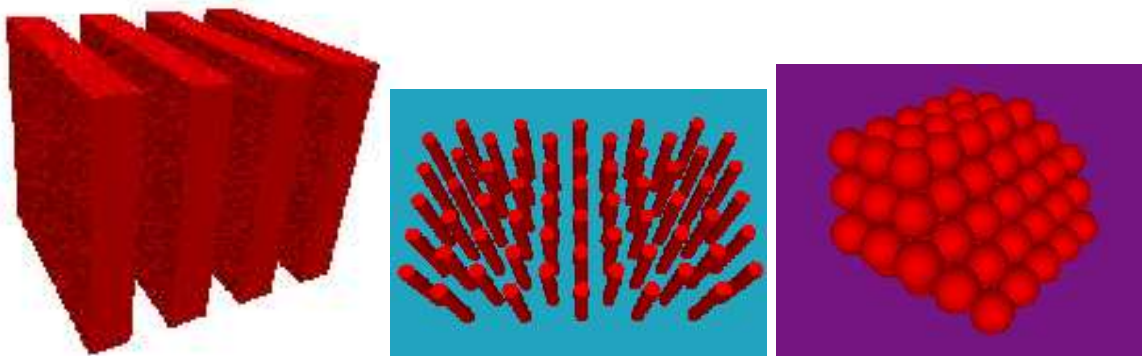


Figur 1: Lydbølge rammer en mur og en del transmitteres igennem muren via elastiske bølger.

Skitsen i Figur 1 viser en lydbølge der rammer en mur. En del af den indkomne bølge reflekteres, men en del transmitteres gennem mur-materialet og udstråles på den modsatte side. Transmissionen af bølgen gennem muren foregår via elastiske svingninger i materialet. Et andet velkendt eksempel på bølger er udbredelsen af synligt lys.

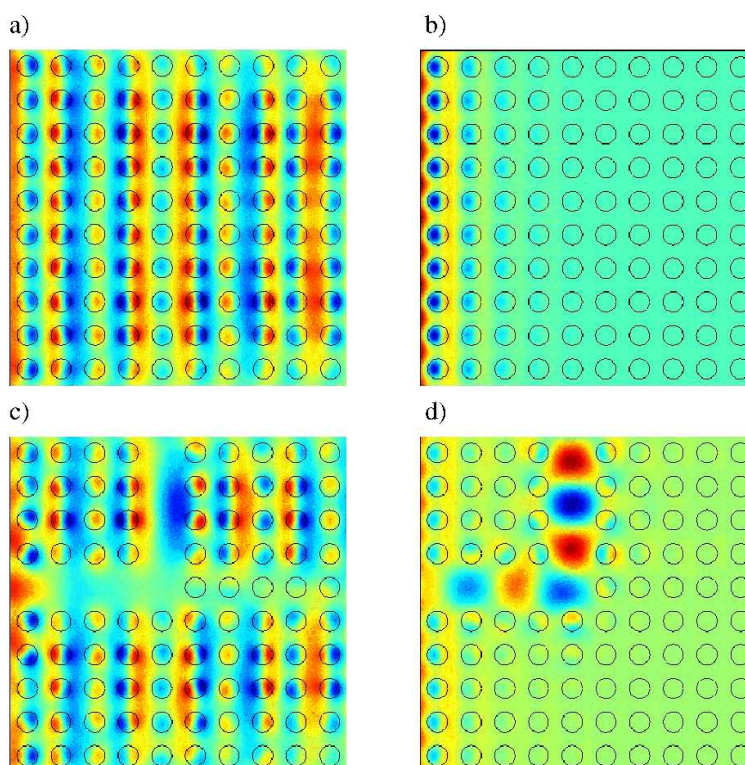
Der har i det seneste årti, se [5], været stor fokus på bølgeudbredelse i periodiske materialer og strukturer. Det har vist sig, at man med et nøje afstemt periodisk arrangement af materialer med forskellige fysiske egenskaber¹ kan opbygge strukturer, hvorigennem bølger med visse frekvenser ikke kan udbrede sig. Disse gab i frekvensbåndet kaldes *båndgab*. I Figur 2 ses nogle eksempler på sådanne periodiske båndgabstrukturer i én, to og tre dimensioner. Båndgab for elastiske bølger kaldes *fononiske båndgab*, og tilsvarende bruger man betegnelsen *fotoniske båndgab*, når det drejer sig om lys eller mere generelt om elektromagnetiske bølger.

¹Eksempelvis massefylde, stivhed (E-modul), refraktions-index og lign.



Figur 2: Én-, to- og tre-dimensionelle periodiske båndgabstrukturer.

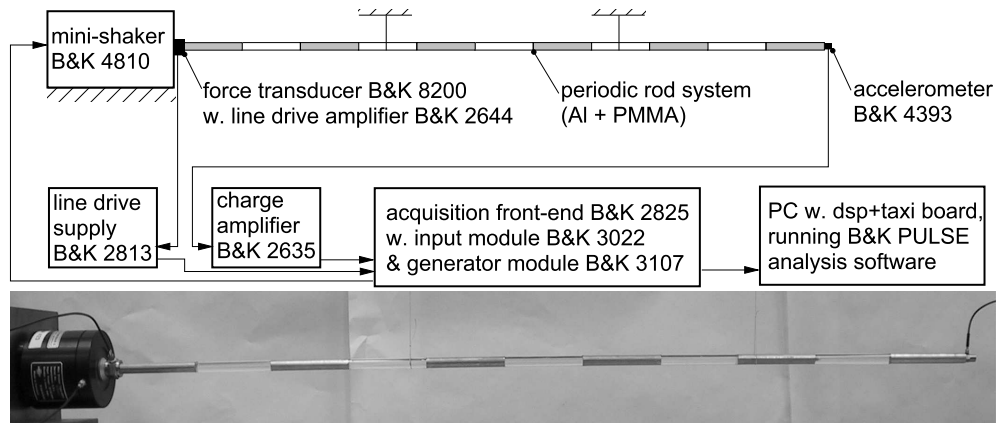
Med et sådant effektivt middel til at stoppe bølgeudbredelse er der mulighed for en masse spændende høj-teknologiske anvendelser. Bølge-reflektorer (spejle) og mekaniske filtre er en oplagt anvendelse. Et af de mest spændende anvendelsesområder er inden for bølgeledere (waveguides), se Figur 3. En periodisk struktur er her opbygget således, at bølger med en bestemt frekvens (båndgabsfrekvensen) ikke kan udbredes (Figur 3b), hvorimod bølger med en anden frekvens godt kan slippe igennem (Figur 3a). Ved at lave en defekt i det periodiske arrangement kan man ved båndgabsfrekvensen (Figur 3d) få bølgerne til at følge defekten, og man har således konstrueret en effektiv bølgeleder.



Figur 3: Opbygning af en bølgeleder. a) og c): frekvens uden for båndgabet, b) og d): båndgabsfrekvens.

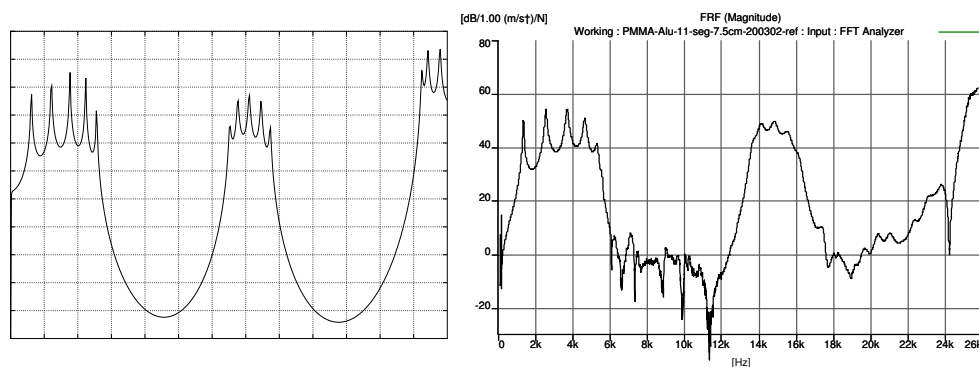
2 Eksperimentel opstilling

Eksistensen af båndgab kan illustreres ved et simpelt eksperiment, se [1]. En én-dimensional båndgabs-struktur i form af en tynd stav er vist i Figur 4. Staven består af 6 stykker aluminium og 5 stykker epoxy, der er limet sammen i enderne, og som påvirkes af en periodisk kraft i den ene ende vha. et rystebord. I stavens modsatte ende måles vibrations-niveaue, og man får således et mål for bølgeudbredelsen gennem staven.



Figur 4: Eksperimentel opstilling.

Ved beregninger på en fysisk model for staven kan man forudsige to båndgab i det hørbare område, fra ca. 5 kHz til ca. 13 kHz og igen fra ca. 16 kHz til ca. 24 kHz (se Figur 5 til venstre). I disse to frekvensbånd kan der således ikke udbrede sig elastiske bølger gennem staven, og vibrationsniveauet i stavens modsatte ende burde således være lavt. Dette bekræftes af målingerne, se Figur 5 til højre.



Figur 5: Vibrationsniveau i enden af staven. Venstre: beregninger, højre: eksperimentelle resultater.

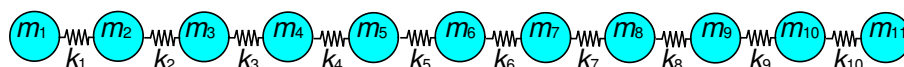
I de efterfølgende opgaver vil vi først opstille en simpel fysisk model, der består af diskrete fjedre og masser. Modellen skal give en forståelse af de svingningsformer, der kan opstå i den elastiske stav. Endvidere vil den diskrete model give mulighed for design og optimering af en mekanisk båndgabsstruktur. Til sidst vil det være muligt at arbejde med en kontinuert model, der kan beskrive udbredelsen af de longitudinale bølger i staven.

I skal ikke nå det hele, så I må gøre nogle valg undervejs.

3 Diskret model

3.1 Den generelle model

Som en simpel fysisk model, der kan beskrive bølgeudbredelse og vibrationer i den elastiske stav, benyttes et diskret masse-fjeder system. Hver aluminiums- og epoxystav modelleres med en punktmasse og en fjeder, undtagen den sidste aluminiumsstav, som blot modelleres med en enkelt masse. Modellen består således af 11 masser forbundet med hinanden via 10 fjedre (se Figur 6). Massernes størrelse betegnes m_1, \dots, m_{11} og fjeder-konstanterne k_1, \dots, k_{10} . Systemet tænkes ophængt, således at det kun kan bevæge sig *longitudinalt*.



Figur 6: System med 11 masser og 10 fjedre.

I de efterfølgende opgaver skal forskellige egenskaber vedrørende svingninger i masse-fjeder systemet undersøges, og beregningerne på den diskrete model afsluttes med en optimeringsopgave, hvor masser og fjedre skal vælges, så svingnings-amplituden af den sidste masse er mindst mulig.

Bevægelsesligningerne for systemet kan opstilles ved brug af Newtons 2. lov.

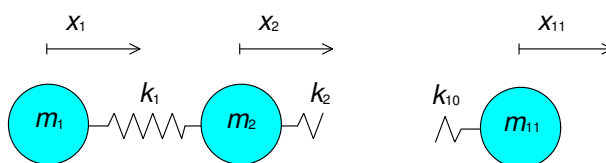
1. Vis, med fortegnskonventionen for forskydningerne af masserne x_i defineret som i Figur 7, at bevægelsesligningerne kan skrives som

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0, \tag{1}$$

$$m_i \ddot{x}_i + k_i(x_i - x_{i+1}) + k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = 0, \text{ for } i \in \{2, \dots, 10\}, \tag{2}$$

$$m_{11} \ddot{x}_{11} + k_{10}(x_{11} - x_{10}) = 0, \tag{3}$$

hvor \ddot{x} betyder 2 gange differentiation af x mht.til tidsvariablen t .



Figur 7: Fortegnskonvention for forskydningerne af masserne.

Forskydningerne af de 11 masser x_1, \dots, x_{11} samles nu i vektoren $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{11}\}^T$.

2. Vis at bevægelsesligningerne kan skrives på matrixform som:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \underline{x} = \underline{\underline{0}}, \tag{4}$$

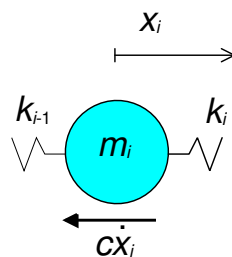
hvor $\underline{\underline{M}}$ er en såkaldt *massematrix*:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{11} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

og $\underline{\underline{K}}$ er en såkaldt *stivhedsmatrix*:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & \cdots & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -k_{10} & k_{10} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Når masserne svinger, vil der foregå en vis *dæmpning* af bevægelsen. Her modelleres dæmpningen som en såkaldt *viskos dæmpning*. Det antages, at hver masse påvirkes af en kraft $c\dot{x}_i$ modsat rettet bevægelsesretningen, hvor c er en dæmpningsfaktor, der blandt andet afhænger af massernes form og det omgivende medies viskositet (Figur 8).



Figur 8: En masse med dæmpningskraft.

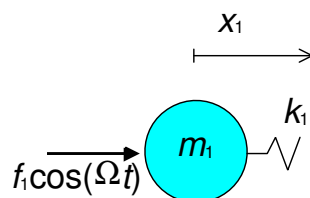
3. Vis, at bevægelsesligningen paa matrixform nu kan skrives som

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}}\underline{x} = \underline{0}, \quad (7)$$

hvor $\underline{\underline{C}}$ er en *dæmpningmatrix*, der er givet ved

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Systemet er yderligere påvirket af en periodisk kraft med størrelsen $f_1 \cos(\Omega t)$, der virker på



Figur 9: Den første masse med harmonisk belastning.

den første masse (Figur 9). For at simplificere analysen bruges i det følgende den eksponentielle notation (jf Analyse 1 bogen).

4. Vis at bevægelsesligningen for den første masse ændres til

$$m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = f_1 \cos(\Omega t) = \text{Re}(f_1 e^{i\Omega t}). \quad (9)$$

I kompleks notation har denne ligning således formen

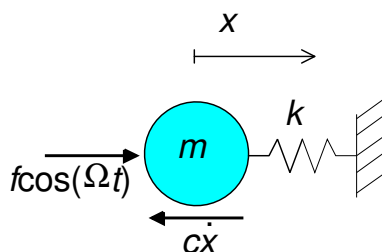
$$m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = f_1 e^{i\Omega t} , \quad (10)$$

og matrix-ligningen for det samlede system skrives som:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{f}} e^{i\Omega t} , \quad (11)$$

hvor $\underline{\underline{f}} = \{f_1 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$ er en konstant *belastningsvektor*.

3.2 System med én masse og én fjeder



Figur 10: System med én masse og én fjeder.

Som en indledende analyse betragtes først et system bestående af én masse og én fjeder (Figur 10). Differentialligningen for massen bliver således:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = f_1 \cos(\Omega t) . \quad (12)$$

Man definerer systems *egenfrekvens* eller *resonansfrekvens* ω_0 og systemets *kritiske dæmpning* c_0 ved

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad c_0 = 2\sqrt{mk} .$$

I det følgende sætter vi $m = k = 1$, hvilket svarer til at resonansfrekvensen er $\omega_0 = 1$ og den kritiske dæmpning er $c_0 = 2$.

5. Betragt den til (12) svarende homogene differentialligning med nul på højresiden.

Find for $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$, $c = 2$ og $c = 5$ den fuldstændige løsning til den homogene ligning. Benyt SymPy, men kontrollér løsningerne i hånden.

Vælg begyndelsesbetingelserne $x(0) = \frac{1}{10}$ og $\dot{x}(0) = 0$, og find for hver af ovenstående værdier af c de dertil hørende partikulære løsninger, og plot dem i

Prøv at karakterisere de fundne løsninger når $c = 0$, $0 < c < c_0$, $c = c_0$ og $c > c_0$.

6. Vi ser nu på den inhomogene differentialligning (12) , idet vi sætter $f_1 = 1$ samt betragter kraftens frekvens Ω og dæmpningen c som parametre.

Find en partikulær løsning til (12) ved at bruge den komplekse gættemetode. Brug gerne SymPy. Løsningen kaldes *den stationære løsning*, hvorfor?

Vink: Sæt $x(t) = ae^{i\Omega t}$, hvor a er en kompleks konstant, der afhænger af Ω og c .

Plot amplituden $|a|$ i SymPy som funktion af frekvensen Ω for forskellige værdier af dæmpningen c . Kommentér kurverne.

7. Vi betragter igen den inhomogene differentialligning givet ved (12), hvor vi sætter $f_1 = 1$ og $\Omega = \omega_0 = 1$.

Vælg igen begyndelsesbetingelserne $x(0) = \frac{1}{10}$ og $\dot{x}(0) = 0$, og find for $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$, $c = 2$ og $c = 5$ de dertil hørende partikulære løsninger, og plot dem i SymPy.

3.3 Svingningssystem uden dæmpning og uden harmonisk belastning

Nu betragtes det fulde system med 11 masser og 10 fjedre.

Systemet betragtes i første omgang uden dæmpning $c = 0$ og ligeledes uden den harmoniske belastning $f_1 = 0$. Bevægelsen af masserne er således givet ved ligning (4).

Der skal nu findes egenværdier og egenvektorer for matrix-ligningssystemet. Gæt på en løsning til ligning (4) på formen

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{v}}e^{i\omega t}, \quad (13)$$

hvor $\underline{\underline{v}}$ er en konstant vektor og ω er en egenfrekvens.

8. Vis, at dette resulterer i følgende ligning (et generaliseret egenværdiproblem):

$$(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}})\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{0}}, \quad (14)$$

og vis yderligere at dette kan omskrives til en ligning på følgende form:

$$(\underline{\underline{S}} - \omega^2 \underline{\underline{I}})\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{0}}, \quad (15)$$

hvor $\underline{\underline{S}}$ er en ny matrix.

9. Vælg $m_1 = m_2 = \dots = m_{11} = 1$ og $k_1 = k_2 = \dots = k_{10} = 1$, og find alle egenfrekvenserne ω_i , hvor $i = 1, \dots, 11$, samt de tilhørende egenvektorer $\underline{\underline{v}}_i$. Plot hver egenvektors koordinater som funktion af koordinatnummeret.

3.4 Svingningssystem uden dæmpning og med harmonisk påvirkning

Ligningssystemet for det udæmpede system med en harmonisk påvirkning er givet ved

$$\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\ddot{x}}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{f}}e^{i\Omega t}. \quad (16)$$

Den komplekse gættemetode bruges nu til at finde en partikulær løsning til ligning (16).

10. Indsæt i (16) en løsning på formen

$$\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{a}}e^{i\Omega t}, \quad (17)$$

hvor $\underline{\underline{a}}$ er en konstant vektor, og vis, at dette resulterer i ligningen

$$(\underline{\underline{K}} - \Omega^2 \underline{\underline{M}})\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{f}}. \quad (18)$$

Da de frie svingninger (løsningen til den tilsvarende homogene ligning) hurtigt dæmpes (som vi også så i opgave 7), ignorerer man normalt disse, og kun de tvungne svingninger repræsenteret ved den fundne partikulære løsning betragtes. Denne løsning kaldes også *den stationære løsning*.

11. Vælg igen $f_1 = 1$ og $m_1 = m_2 = \dots = m_{11} = 1$ samt $k_1 = k_2 = \dots = k_{10} = 1$, og plot svingningsamplituden af den 11'te masse $|a_{11}|$ som funktion af den på trykte frekvens Ω i intervallet $]0, 2]$. Sammenlign kurven med de udregnede egenverdier (egenfrekvenserne) jævnfør ligning (15). Giv et bud på, hvordan egenverdierne kan fortolkes.

3.5 Optimering af det diskrete system

Vi vil nu undersøge, hvad der sker, når masserne og fjedrene tillades at variere i størrelse. Systemet betragtes igen uden dæmpning, dvs. $c = 0$. Lad som før $k_1 = k_2 = \dots = k_{10} = 1$, men nu er $m_1 = m_3 = \dots = m_{11} = 1$ og $m_2 = m_4 = \dots = m_{10} = m$.

12. Lad $f_1 = 0$. Plot egenfrekvenserne ω_i for et antal værdier af m i intervallet $[\frac{1}{10}, 8]$.

Kan vi ud fra plottet sige noget om for hvilke værdier af m , der kan eksisterer båndgab?

13. Lad $f_1 = 1$. Plot svingningsamplituden $|a_{11}|$ af den 11'te masse som funktion af frekvensen Ω i intervallet $[0, 2]$ med $m = \frac{1}{2}$.

Vink: Plot amplituden i dB (decibel), dvs. plot $20 \log_{10} |a_{11}|$ som funktion af tiden.

14. Lad nu yderligere $k_1 = k_2 = \dots = k_{10} = k$. m og k kan ikke varieres frit, hvis vi også skal kunne realisere vores løsning fysisk. Vi begrænser os derfor til at søge løsninger for $k \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ og $m \in [1, 3]$.

Find i ovenstående intervaller den kombination af k og m , der giver den minimale værdi af $|a_{11}|$ for $\Omega = 0.8$ og $f_1 = 1$.

Vink: Lav 3-d plots af logaritmen til absolutværdien af a_{11} for at finde værdier af m og k .

Overvej, hvordan man kan finde mere præcise værdier for m og k .

15. Overvej nogle designkriterier for båndgab, se [3] og [4].

3.6 Undersøgelse af dæmpningens indflydelse

Egenverdierne for det dæmpede system:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}}, \quad (19)$$

skal nu findes.

16. Omskriv først ligning (19) til et første ordens differentialligningssystem på formen

$$\underline{\dot{y}} = \underline{A}\underline{y}, \quad (20)$$

og find egenverdier og egenvektorer (λ, \underline{v}) for systemet, ved at indsætte

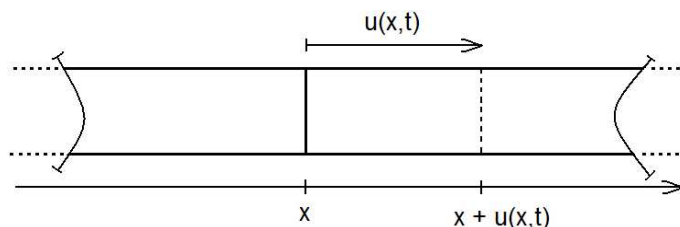
$$\underline{y} = \underline{v}e^{\lambda t}, \quad (21)$$

som en mulig løsning til (20). Sammenlign egenverdierne for varierende værdier af c med egenverdierne fundet for det udæmpede system. Hvordan kan man fortolke henholdsvis den reelle og den imaginære del af λ ? Undersøg hvorledes resultaterne fundet i **opgaverne 11, 13 og 14** for svingningsamplituden $|a_{11}|$ ændres når dæmpningen sættes til $c = \frac{1}{10}$.

4 Kontinuert model

Vi skal nu se hvorledes den kontinuerte model kan benyttes til at beskrive den målte båndgabsstruktur vist i figur 5.

4.1 Longitudinale bølger i en stav



Figur 11: Forskydning i en plan bølge

Vi vil nu beskrive hvorledes en plan longitudinal bølge udbreder sig i en stav. Vi forestiller os, at vi har en uendelig stav i x-aksens retning med tværsnitsarealet A , se figur 11. En longitudinal bølge er en forstyrrelse, der udbreder sig i x-aksens retning. Udbredelsen i staven foregår på en sådan måde, at de massedele, der alle oprindeligt befandt sig på stedet x , til et senere tidspunkt t vil befinde sig i samme tværsnit, men blot forskudt stykket $u(x,t)$. Alle partiklerne vil nu derfor befinde sig på stedet $x + u(x,t)$. En plan *harmonisk bølge*, der udbreder sig i x-aksens positive retning, kan skrives

$$u(x,t) = u_1 \cos(kx - \omega t), \quad (22)$$

hvor u_1 er *amplituden*, k er *bølgetallet* og ω er *vinkelfrekvensen*. For bølgetallet gælder

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (23)$$

hvor c er bølgehastigheden i staven, E er elasticitetsmodulen for det elastiske materiale og ρ er massefylden. For at lette beregningerne kan en plan bølge, som udbreder sig i x -aksens retning, og som er givet ved (22), skrives på den komplekse form

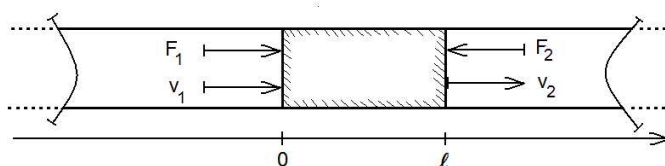
$$u(x,t) = u_1 e^{i(kx - \omega t)} \quad . \quad (24)$$

Et udtryk for en bølge, der udbreder sig i x -aksens negative retning, kan findes ved erstatte x med $-x$ i udtrykket (24), hvilket giver

$$u(x,t) = u_2 e^{i(-kx - \omega t)} \quad . \quad (25)$$

Amplituderne u_1 og u_2 i (24) og (25) er i almindelighed komplekse størrelser. Ovenstående udtryk for $u(x,t)$ kaldes *løbende bølger*. Amplituden i en løbende bølge er uafhængig af stedet. Hvis staven ikke er endelig eller består af flere forskellige materialer, vil der optræde reflektioner ved grænsefladerne. Dette vil give anledning til, at der både vil være en bølge, der udbreder sig i x -aksens positive retning, såvel som en bølge, der udbreder sig i den negative retning. Herved optræder der et fænomen, der kaldes for *stående bølger*. Dette skal vi se nærmere på i næste afsnit.

4.2 Stående bølger



Figur 12: Stav med længden ℓ

Lad os betragte et endeligt stykke af staven med længden ℓ og tværsnitsareal A , og som er beliggende mellem $x = 0$ og $x = \ell$, se figur 12. På grund af de to grænseflader for $x = 0$ og $x = \ell$ vil der optræde en bølge i både x -aksens positive retning og negative retning. Den resulterende forskydning $u(x,t)$ i staven på stedet x og til tiden t , må da kunne skrives

$$u(x,t) = u_1 e^{i(kx - \omega t)} + u_2 e^{i(-kx - \omega t)} \quad , \quad (26)$$

hvor u_1 og u_2 er komplekse konstanter. Udtrykket for $u(x,t)$ repræsenterer en stående bølge, hvor den samlede amplitude vil afhænge af stedet x . Vi ønsker nu at opskrive en sammenhæng imellem kræfterne F_1 og F_2 samt hastighederne v_1 og v_2 , der optræder på de to endeflader. Læg mærke til den fortegneregning for kræfter og hastigheder, som er givet på figur 12. For hastigheden $v(x,t)$ i x -retningen i et vilkårligt tværsnit af bjælken gælder

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad . \quad (27)$$

Den resulterende kraft $F(x,t)$ på et højre- eller venstresnit i et vilkårligt tværsnit af staven, kan vises at være

$$F(x,t) = -EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} . \quad (28)$$

Fortegnsregningen for ovennævnte udtryk for kraften svarer til pilene givet i figur 12 .

17. Udled udtryk for hastighederne $v_1 = v(0,t)$ og $v_2 = v(\ell,t)$, samt kræfterne $F_1 = F(0,t)$ og $F_2 = F(\ell,t)$, som er defineret i figur 12 .

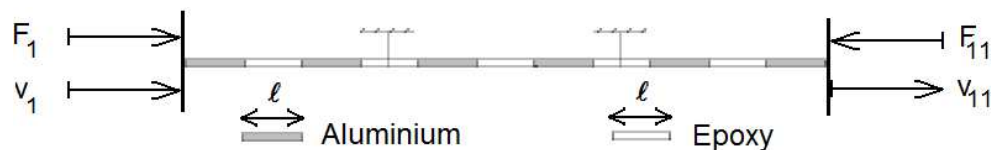
18. Vis, at der gælder sammenhængen

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k\ell) & z \cdot i \sin(k\ell) \\ 1/z \cdot i \sin(k\ell) & \cos(k\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} , \quad (29)$$

hvor z er stavens *mekaniske impedans* givet ved

$$z = \frac{EA}{c} . \quad (30)$$

4.3 Inhomogene stav med 11 sektioner



Figur 13: Eksperiment med stav

I figur 13 er vist staven fra den eksperimentelle opstilling fra figur 5 . Staven består af 6 cirkulære aluminiumstave og 5 cirkulære epoxystave med samme længde $\ell = 75$ mm og samme diameter $d = 10$ mm . Følgende materiale data, se [2], er opgivet:

$$\begin{array}{ll} \text{Aluminium: } E_A = 70,0 \text{ GPa} & , \quad \rho_A = 2700 \text{ kg/m}^3 . \\ \text{Epoxy: } E_E = 4,4 \text{ GPa} & , \quad \rho_E = 1200 \text{ kg/m}^3 . \end{array}$$

19. Beregn ud fra de givne data ved hjælp af SymPy et udtryk for den numeriske værdi af *overføringsmatricen* defineret nedenfor

$$\begin{bmatrix} F_{11} \\ v_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} , \quad (31)$$

der angiver sammenhængen imellem hastigheden v_1 og kraften F_1 i venstre endepunkt af staven og hastigheden v_{11} og kraften F_{11} i højre endepunkt af staven, se figur 13 .

Staven påvirkes nu i venstre endepunkt med en given kraft F_1 , medens den i højre endepunkt er fri, det vil sige, at $F_{11} = 0$.

20. Vis, at der med de givne randbetingelser gælder følgende sammenhænge

$$v_{11} = \frac{1}{a_{1,1}} v_1 \quad , \quad v_{11} = -\frac{1}{a_{1,2}} F_1 \quad . \quad (32)$$

Vink: Udnyt, at værdien af determinanten af matricen givet i (29) er 1 .

I den eksperimentelle opstilling, vist i figur 4, måles kraften F_1 i venstre endepunkt af staven og acceleration $a_{11} = -i\omega v_{11}$ i højre endepunkt af staven.

21. Plot i SymPy amplituden af hver af overføringsfunktionerne H_1 og H_2 givet ved

$$H_1 = \frac{v_{11}}{v_1} = \frac{1}{a_{1,1}} \quad , \quad H_2 = \frac{a_{11}}{F_1} = \frac{i\omega}{a_{1,2}} \quad (33)$$

som funktion af frekvensen $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Sammenlign plottet af $|H_2|$ med kurven givet i figur 5.

Vink: Foretag afbildningen af amplituden i decibel, det vil sige $20 \log(|H|)$ dB .

4.4 Optimering af det kontinuerte system

I får nu frihed til at ændre de givne materiale data. For at mindske valgmulighederne, kunne vi f.eks. holde bølgehastighederne i hver af de to materialer konstant, svarende til de oprindelige værdier af lydhastigheden i aluminium og epoxy. Det betyder, at elasticitetsmodulerne E og massefylderne ρ i hver af materialerne varieres proportionalt med samme konstant.

22. Undersøg hvad ændring i materiale data betyder for størrelsen og placeringen af båndgab.

Litteratur

- [1] J.S.Jensen, O.Sigmund, J.J.Thomsen and M.P.Bendsøe, Design of multi-phase structures with optimized vibrational and wave-transmitting properties. 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics 2002, Aalborg, Denmark.
- [2] J.S.Jensen and O.Sigmund, Phononic band gap structures as optimal designs. IUTAM Symposium on Asymptotics, Singularities and Homogenization in Problems of Mechanics, 73-84 . Kluwer Academic Publishers 2003.
- [3] J.S. Jensen, Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures. J.Sound Vib. **206**, 1053-1078 (2003).
- [4] S.Halkjær, O.Sigmund and J.S.Jensen, Inverse design of phononic crystals by topology optimization, Z.Kristallogr. **220**, 895-905 (2005).
- [5] Website: Over 1000 links on Photonic Crystals related resources. <http://www.pbglink.com/>