UDSIVNING FRA AFFALDSDEPONIER

Matematik 1b – 2025 – køreplan

1 Formål

Forurening er et globalt – og et lokalt problem. Forurening af omkringliggende jordområder transporteres til vandløb bl.a. via grundvandsstrømning. Denne forurening kan f.eks. bestå i pestidicer der sprøjtes på marker eller i sjældnere tilfælde af ikke-genanvendeligt affald, der er placeret i såkaldte deponier. Forureningen kan udgøre en trussel mod de planter og dyr, der lever i vandet.

Formålet med opgaven er at analysere en simpel model for hvordan forurening transporteres ved hjælp af grundvandsstrømning. Fysisk set er en sådan transport beskrevet ved *Darcy's lov* for væskestrømninger:

$$Q = -K \cdot A \frac{\partial h}{\partial x}$$

Darcy's lov svarer til Ohms lov for elektriske kredsløb, mens K svarer til ledningsevnen (1/modstand) og A er et tværsnitsareal. Trykgradienten $\partial h/\partial x$ driver strømningen.

Matematisk set handler projektet om emner som løsning af lineære og ikke-lineære differentialligninger for trykket, $h(x)$, via numeriske og eksakte metoder (f.eks. via diagonalisering). Derudover omhandler

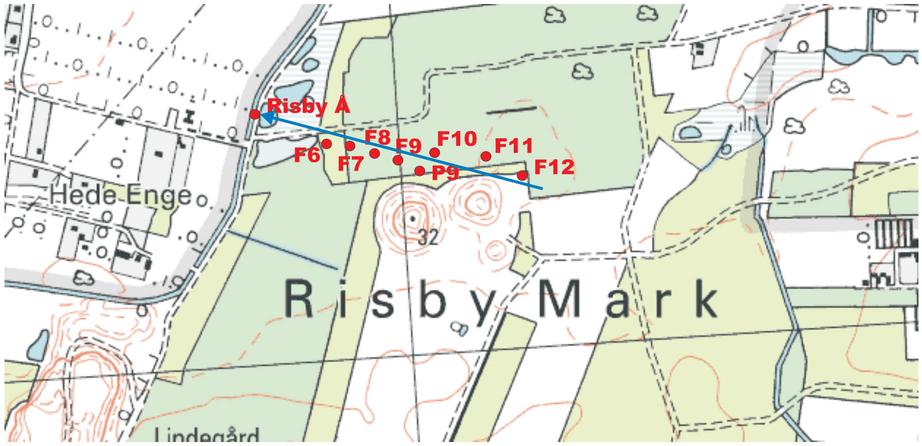

Figure 1: Kort over Vestskovdeponiområdet. De tre deponier anes som forhøjninger i landskabet. Umiddelbart nord for deponierne ligger et transekt af boringer, hvor grundvandsstanden er målt.

den bestemmelse af minimum for en funktion af flere variable med henblik på tilpasning af model til måledata.

Med disse resultater kan man besvare det centrale spørgsmål: hvor lang tid er forureningen om at blive transporteret ned til åen?

2 Baggrund

I den første del af opgaven skal man undersøge hvordan forurening transporteres ved hjælp af grundvandsstrømning ved at udgangspunkt i et konkret tilfælde – forurening til Risby å i Vestskoven.

Et kort over området ved Vestskoven er vist i Figur 1 (øverst). I området er der tre deponier, hvor der er deponeret bl.a. flyveaske. Der har fundet en forurening sted i området på grund af lækage fra disse deponier, der ellers var udført med en tæt membran. I området er der en række boringer, hvor grundvandsstanden, eller rettere, det hydrauliske trykniveau er målt. Ved hjælp af disse trykniveauer kan man skitsere grundvandets strømningsretning. Figur 1 viser således de boringer der vil blive benyttet i dette projekt. Grundvandsstrømningen er fra boring F12 forbi deponierne og mod Risby å.

Figur 2 (næste side) viser en principskitse af den regionale geologi i området. Øverst består området af ca. 2-4 meter morænesand, efterfulgt af ca. 18 meter moræneler. Kalk træffes under dette lag. Et snit igennem det lokale område er vist på Figur 3 (næste side). Dette snit er lagt tilnærmelsesvis langs en strømlinie fra F12 til Risby å. Figuren viser de boringer hvor grundvandstanden (h, skitseret på figuren) er målt. Figuren viser også, at der er to grundvandsmagasiner. Et øvre sekundært grundvandsmagasin (fin sand/silt), der er i kontakt med den nærliggende å (Risby), samt et nedre primært grundvandsmagasin i kalken, der i området benyttes til drikkevandsforsyning. Moræneleret adskiller de to grundvandsmagasiner.

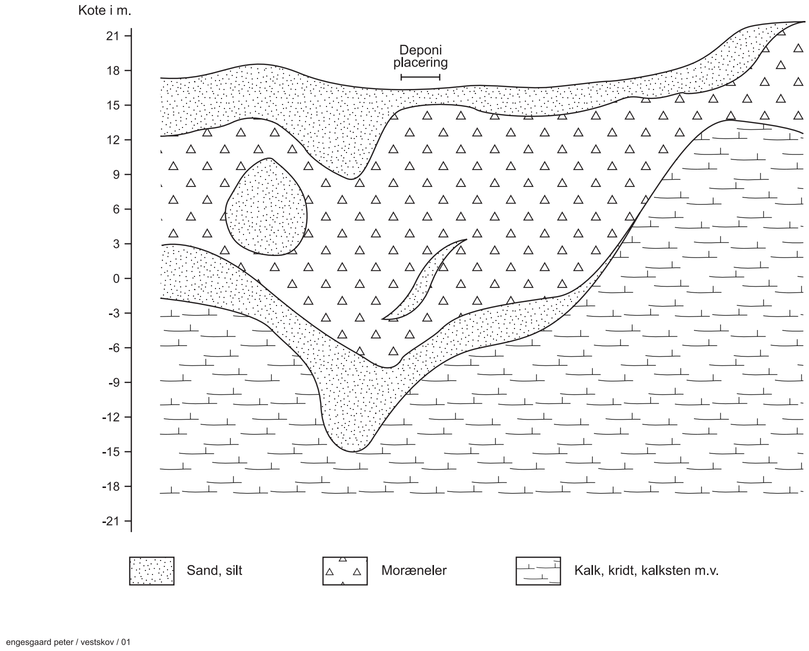

Figure 2: Regional geologi i området. Deponiområdet er vist på figuren.

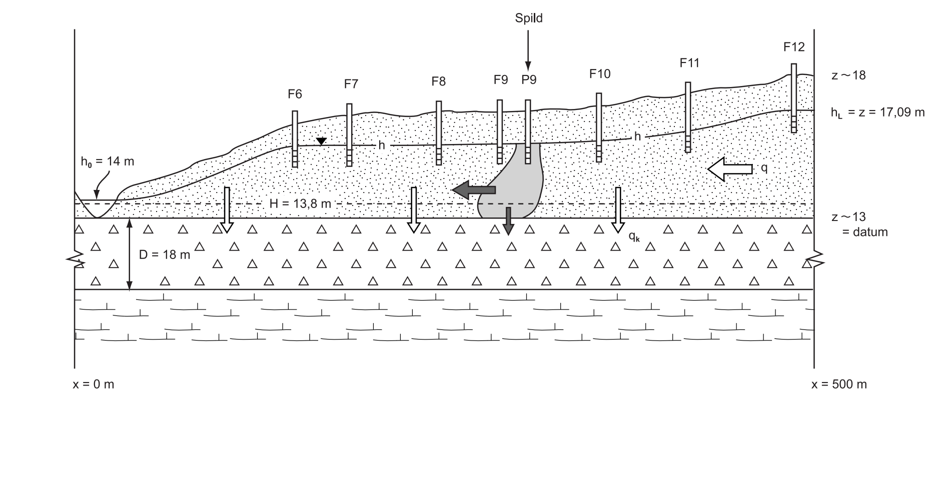

Figure 3: Transekt med lokal geologi, boringer og trykniveauer i øvre og nedre grundvandsmagasin.

Som skitseret på Figur 3 er der en horisontal strømning fra øst for deponierne ned mod Risby å (q på Figur 3). Det skyldes at der er et trykfald ned mod åen. Samtidig er der også en nedadrettet trykgradient og strømning (q_k) mellem det øvre og nedre magasin da trykniveauet i kalken overalt kan antages at være H=13.8 m, dvs. under det trykniveau der er i det øvre afsnit, hvor h er ca. 14-17 m langs tværsnittet (trykket er lavere da der tappes vand fra det nedre magasin). Forureningen i området er sket ud for boring P9 (Figur 3). Forureningen vil derfor bevæge sig horisontalt mod åen – og vertikalt mod kalkmagasinet.

3 Data

Data for området i Vestskoven fremgår af Tabel 1 og 2 (nederst). Netto-infiltrationen til grundvandet er 200 mm/år (der regner ca. 700 mm per år i gennemsnit, men ca. 500 mm afdræner og fordamper). Tykkelsen af moræneleret kan sættes til $m = 18$ m og trykniveauet i kalken er konstant $H = 13.8$ m.

En model for trykket, $h(x)$, i det øvre grundvandsmagasin er nedenfor opstillet for tværsnittet vist i Figur 3. Tværsnittet er $L = 500$ m langt og randbetingelserne er givet ved fastholdte trykniveauer. I $x = 0$ m er trykniveauet $h(0) = 14.00$ m og i $x = 500$ m er trykniveauet det samme som i F12, dvs $h(500) = 17.09$ m.

De to ubekendte parametre i modellen er K_s og K_m, som er de hydrauliske ledningsevner for henholdsvis det øvre grundvandsmagasin og for moræneleret, der adskiller dette fra det nedre grundvandsmagasin i kalken. I praksis bestemmes hydrauliske ledningsevner ved forsøg.

Der er d. 14. maj, 1999 foretaget en række trykniveauer, som er vist i Tabel 2. Tværsnittet i Figur 3 er næsten parallelt med øst-vest og Tabel 2 viser derfor UTM (East) koordinaterne til boringerne (UTM står for Universal Transverse Mercator).

Table 1: Data fra Vestskoven

Parameter	Værdi	Enhed
Netto-infiltration, N	0.2	m/år
Datum, z_0	13	m
Tykkelse af moræneler, m	18	m
Trykniveau i kalk, H	13.8	m
Porøsitet i øvre magasin, θ	0.21	-
Længde af tværsnit, L	500	m
Fasthold tryk, h_0	17.09	m
Fasthold tryk (åen), h_L	14.00	m

Table 2: Observerede trykniveauer, h, se Figur 3 og UTM-east koordinater.

Boring	UTM-East (m)	Trykniveau (m)
F12	333147	17.09
F11	333068	16.38
F10	333008	16.38
P9	332961	16.14
F9	332938	16.11
F8	332883	16.09
F7	332836	16.05
F6	332788	16.06
Risby å	332647	14.00

Opgave 3.1

(a) Lav et plot i Sympy af datapunkterne givet i Tabel 2, f.eks. af $h(x)$ som funktion af afstanden til åen, x. Afstanden udregnes ud fra UTM koordinaterne. Hvad er betingelserne på randværdierne for h?

(b) Overvej hvilken slags n'te–gradspolynomium $p_n(x)$ der umiddelbart ville kunne approksimere datapunkternes forløb? Prøv f.eks. at eksperimentere med $n = 1, \ldots, 4$.

4 Fysisk model

I dette afsnit opstilles en fysisk model til bestemmelse af trykfaldet h som funktion af afstanden, x. Strømning af væske i porøse medier styres af Darcy's lov:

$$Q = -K_s \cdot A \frac{\partial h}{\partial x} \tag{4.1}$$

hvor Q er vandføringen (måles i m^3/s), h er trykniveau (m), A er tværsnitsareal (m^2) og K_s er grundvandsmagasinets hydrauliske ledningsevne (m/s). En K-værdi karakteriserer derfor hvor godt "geologien leder vand". Sand har en relativt høj K-værdi ($\sim 10^{-4} - 10^{-3}$ m/s), mens ler har en lavere K-værdi ($\sim 10^{-7} - 10^{-6}$ m/s). Det fremgår, at en trykgradient ($\partial h/\partial x \neq 0$) er nødvendig for at facilitere en strømning, analogt til at en potentialforskel er nødvendig for at skabe en strøm i et elektrisk kredsløb.

I princippet er arealet A en funktion af tre variable $A = A(x, y, z)$, dvs det kan ændre sig i horisontal og lodret retning. I det følgende skal vi kun kigge på en een-dimensional model. Her sætter vi arealet A til A=(1 m $\cdot$ d), hvor $d = h - z_0$ er den mættede lagtykkelse (m) i sandet, se Figur 3 (z_0 er datum, dvs. referencepunkt). Med andre ord regnes alt i "per meter bredde". Tværsnitsarealet ændres derfor med afstanden afhængigt af om grundvandsstanden ændres. Herved bliver (4.1) omskrevet til

$$Q = -K_s \cdot (h - z_0) \frac{dh}{dx} \,. \tag{4.2}$$

Vandføringen Q er derfor ikke-lineær med hensyn til h da der forekommer et ikke-lineært led på formen $h\frac{dh}{dx}$. I det følgende benyttes, at Darcyhastigheden er defineret som strømning per total areal, dvs.

$$q = \frac{Q}{A} = -K_s \frac{dh}{dx} \,. \tag{4.3}$$

Der kan også opstilles en flow balance (totalt flow ind = totalt flow ud) for kontrolvolumenet i Figur 4 (næste side) som udtrykker, at der ikke ophobes væske i kontrolvolumenet:

$$-\frac{dQ}{dx}dx + N dx - q_k dx = 0 \,. \tag{4.4}$$

Her svarer N til nettoinfiltrationen på årsbasis (dvs. nedbør minus aktuel fordampning, altså den del af nedbøren der når ned til grundvandet). Størrelsen N kan her antages konstant svarende til en middel infiltration over et år, og q_k er den vandmængde, der tabes ud af det øvre grundvandsmagasin på grund af en gradient ned mod kalken. Denne vandmængde er ikke nødvendigvis konstant. Trykniveauet i kalken (H, se Figur 3) kan anses for konstant, men da det øvre trykniveau (h) varierer vil q_k også variere, i henhold til Darcy's lov opskrevet i vertikal retning:

$$q_k = -K_m \cdot \frac{H - h}{m} \tag{4.5}$$

hvor K_m og m, er henholdsvis den hydrauliske ledningsevne og tykkelsen af moræneleret.

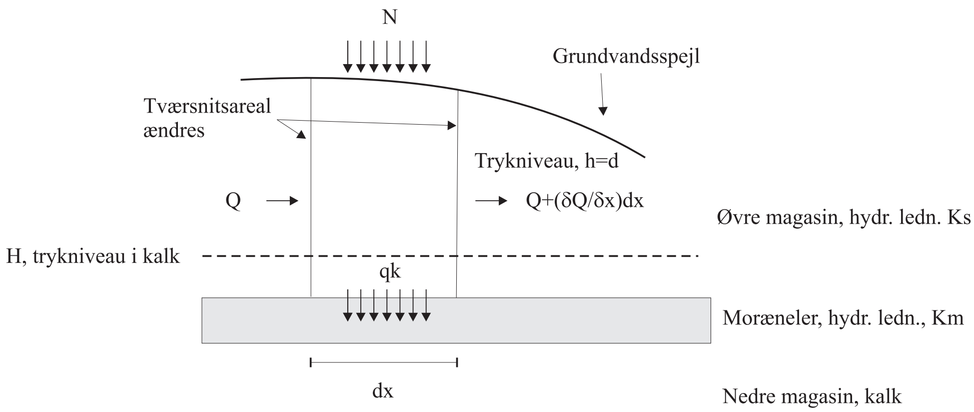

Figure 4: Kontrolvolumen til opstilling af flow balance. Snittet er vist fra den anden side i forhold til Figur 3.

5 Løsning af differentialligninger

Opgave 5.1

(a) Udled med formlerne fra afsnit 4, at trykfaldet $h(x)$ er bestemt ved differentialligningen,

$$\frac{d^2\left((h-z_0)^2\right)}{dx^2} + \frac{2K_m}{K_s}\frac{H-h}{m} + \frac{2N}{K_s} = 0\,. \tag{5.6}$$

(b) Hvilken orden differentialligning er dette? Hvorfor er det en ikke-lineær differentialligning? Overvej hvilke andre betingelser $h(x)$ må opfylde. Dette kan fx være, at h har givne værdier i endepunkterne af intervallet, hvor vi søger at bestemme h (kaldet randbetingelser).

Opgave 5.2

Differentialligningen (5.6) kan ikke løses analytisk. Selvom man ikke kan løse (5.6) direkte, kan man sige noget om, hvordan en mulig løsning vil se ud.

(a) Definer $y(x) = h(x) - z_0$ og find en ligning for $y'(x)$ ved at anvende ligning (5.6). Konkret skal man vise, at $y'(x)$ opfylder en ligning af formen,

$$y'(x) = \frac{1}{6y(x)}\sqrt{12Ay(x)^3 - 18By(x)^2 + 36C} \tag{5.7}$$

Kan Sympy løse denne ligning for $y(x)$?

(Hint: Skriv (5.6) på formen $(y^2(x))'' - Ay(x) + B = 0$, multiplicer venstresiden af (5.6) med $y(x)y'(x)$ og integrer på begge sider).

Opgave 5.3

En måde at tilgå (5.6) på er at se på forskellige grænser, hvor løsningen er af en forholdsvis simpel form.

(a) Antag først, at løsningen til differentialligningen (5.6) er en konstant funktion $h(x) = h_K$ (selvom det strider mod randbetingelserne). Udled et udtryk for h_K ved de givne konstanter.

(b) Antag derefter, at løsningen er en lineær funktion, $h(x) = \alpha x + \beta$. Findes der en løsning $h(x)$ til ligning (5.6) med $\alpha \neq 0$?

(Hint: indsæt de to forskellige løsninger i ligning (5.6)).

Opgave 5.4

Vi ved nu, at den ønskede funktion, $h(x)$, ikke kan være en lineær funktion, dvs en ret linje, men må have en mere kompliceret form.

(a) Sæt de hydrauliske ledningsevner til $K_m = 5 \cdot 10^{-8}$m/s og $K_s = 3 \cdot 10^{-6}$m/s og bestem derudfra en approksimativ værdi for h_K i **opgave 5.3** givet data i Tabel 1 (**i tabellen er N regnet i m/år, det skal omregnes til m/sek**).

(b) Overvej hvorfor det andet led i differentialligningen (5.6) må være lille når $h \simeq H$. Løs derefter differentialligningen (5.6) i det tilfælde hvor det andet led (proportional med K_m/K_s) ignoreres, dvs find en eksakt løsning i dette tilfælde uden brug af Sympy.

(Hint: Hvis $(y(x)^2)'' =$ konstant, må $y^2(x)$ være et andengradspolynomium).

Opgave 5.5

Man kan simplificere (5.6) ved at antage, at tværsnitsarealet A i ligning (4.1) er konstant, dvs. at (4.1) modificeres til

$$Q = -K_s \cdot d_0 \frac{dh}{dx}\,, \tag{5.8}$$

hvor d_0 er en konstant, der f.eks. er et gennemsnit af $h - z_0$ langs transektet af boringer.

(a) Benyt ligning (4.4) og (4.5) til at udlede, at den resulterende differentialligning, der modsvarer (5.6), i dette tilfælde bliver på formen*

$$\frac{d^2(h-H)}{dx^2} - \frac{K_m}{d_0 \cdot K_s \cdot m}\,(h-H) + \frac{N}{d_0 \cdot K_s} = 0\,, \tag{5.9}$$

og at dette dermed er en lineær differentialligning.

(b) Hvilken slags differentialligning er (5.9)? Løs nu (5.9) direkte ved at anvende den kendte teori fra Matematik 1.

(Hint: løs først den tilsvarende homogene ligning, derefter den inhomogene).

*Bemærk, at (5.6) er en differentialligning for $h - z_0$, mens (5.9) er en differentialligning for $h - H$.

6 Modellen som et system af differentialligninger

Alternativt til at løse en 2. ordens differentialligning (5.9), kan man opstille modellen som et system af 1. ordens ligninger.

Ideen er at benytte de variable h og Q til at opskrive et system af første-ordens differentialligninger, som er en model for systemet, jvf. ligningerne (4.1) og (4.4). Bemærk, at disse to ligninger udtrykker det horisontale flow og det vertikale flow. Vi antager, at A er konstant lig med d_0, dermed erstattes (4.1) af (5.8).

Opgave 6.1

(a) Vis, at systemet af differentialligninger (5.8) og (4.4) kan skrives på matrix form (du får også brug for ligning (4.5)). Opstil et sæt af ligninger af formen,

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{B}\,, \tag{6.10}$$

hvor $\mathbf{y}(x) = (h(x), Q(x))^T$, $\mathbf{y}'(x) = (h'(x), Q'(x))^T$ og $\mathbf{A}$ er en 2×2 matrix mens $\mathbf{B}$ er en søjle.

(b) Hvilken slags ligningssystem er dette, og hvordan ser den fuldstændige løsning ud ifølge teorien?

Opgave 6.2

Bestem løsningen til den tilsvarende homogene ligning ved at diagonalisere $\mathbf{A}$, altså $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, hvor $\mathbf{D}$ er en diagonalmatrix og $\mathbf{P}$ er en kvadratisk matrix, der er bestemt ved egenvektorerne for $\mathbf{A}$.

(a) Find egenværdierne og egenvektorerne for $\mathbf{A}$. Vis først, at egenværdierne er givet ved $\lambda_\pm = \pm\sqrt{\frac{K_m}{m d_0 K_s}}$.

(b) Opskriv derefter den fuldstændige løsning til (6.10) ved at bestemme en konstant løsning til $\mathbf{y}'(x) = 0$. Den fuldstændige løsning afhænger af $\lambda_\pm$ og af to ukendte konstanter, som vi kalder c_1 og c_2.

Opgave 6.3

Vi kender endnu ikke værdierne af de hydrauliske parametre ud fra de givne data. Sæt derfor $K_m = 5 \cdot 10^{-8}$m/s og $K_s = 3 \cdot 10^{-6}$m/s til at starte med. Endvidere sætter vi d_0 lig med gennemsnittet af $h - z_0$ langs boringerne.

(a) Indsæt disse værdier for K_m, K_s i den fundne løsning og anvend Sympy til at bestemme de to ukendte konstanter c_1, c_2 ved at benytte randbetingelserne for $h(x)$.

(b) Plot $h(x)$ og sammenlign evt. med plottet i **opgave 3.1**.

(c) Prøv evt at ændre K_m og K_s med op til $\pm 10\%$ og se om dette giver en synligt bedre tilnærmelse til datapunkterne.

7 Bestemmelse af de hydrauliske parametre

På basis af data skulle det være muligt at finde værdierne af de ubekendte hydrauliske ledningsevner K_s og K_m ved sammenligning med modellen. Når man skal "kalibrere" en given model, benytter man for eksempel et mål for fejlen mellem model (funktionen h) og målte data på formen

$$ERR = \left[\sum_{i=1}^{N} |h(x_i) - h_{\mathrm{meas}}(x_i)|^p \right]^{1/p} \quad . \tag{7.11}$$

Her er $h_{\mathrm{meas}}(x_i)$ de målte tryk i positionerne $x_i, i = 1, \ldots, N$ (N er antallet af målepunkter). Potensen p vælges afhængigt af, hvad man vil opnå, forskellige valg af p svarer til forskellige "følsomheder" overfor modellens afvigelser fra data. I det følgende anvendes $p = 2$.

Opgave 7.1

(a) Bestem værdier af K_s og K_m, der gør fejlen ERR så lille som muligt for de i Tabel 2 angivne data. For $h(x)$ benyttes den type løsning man bestemte i **opgave 6.2**, dvs man varierer K_m, K_s lidt væk fra de oprindelige værdier og nye værdier for c_1 og c_2 kan derefter bestemmes ved at benytte randbetingelserne.

Man kan f.eks. nøjes med at udregne fejlen ERR i fem punkter i (K_m, K_s)-planen: først med værdierne i **opgave 6.3**. Derefter ændres K_m med $\pm 10\%$, mens K_s fastholdes, og omvendt. Evt. kan man undersøge ERR som funktion af K_m (fasthold værdien af K_s som $3 \cdot 10^{-6}$ m/s).

Opgave 7.2

(a) Brug Sympy til at bestemme det n'te-gradspolynomium $p_n(x)$ der bedst stemmer overens med data. Prøv med $n = 1, 2, \ldots, 8$.

(b) Udregn fejlen ERR for hver af de otte polynomier i spørgsmål (a).

Opgave 7.3

Der findes et entydigt "Lagrange polynomium", som er det polynomium af grad $\leq n$ der går igennem $n + 1$ givne punkter (x_i, y_i).

(a) Datapunkterne i Tabel 2 består af ni punkter. Bestem det Lagrange polynomium som går eksakt igennem alle punkter. Plot Lagrange polynomiet sammen med datapunkterne, og udregn ERR.

8 Transport af forurening

I den sidste del af opgaven skal man undersøge hvor hurtigt forurening transporteres ved hjælp af grundvandsstrømning.

Darcy's lov (4.1) angiver strømningen per det *totale* tværsnitsareal, A. Da arealet udgøres af sandkornene og porerum (arealet mellem sandkorn) defineres porevandshastigheden som;

$$v = \frac{q}{\theta}\,, \tag{8.12}$$

hvor θ er porøsiteten. Porøsiteten er defineret som antal kubikmeter porerum per kubikmeter total volumen og er derfor mindre end 1. Porevandshastigheden er derfor større end Darcyhastigheden, q.

Den gennemsnitlige opholdstid i et stykke jord af en partikel, der transporteres med grundvandet, findes ud fra hastighed som en afledet:

$$v = \frac{dx}{dt}\,, \tag{8.13}$$

hvor x er positionen af en partikel efter en given tid, t. Heraf kan opholdstiden T af partiklen over intervallet $[x_1, x_2]$ udregnes som;

$$T = \int_0^T dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{v} dx\,. \tag{8.14}$$

Er porevandshastigheden *konstant*, fås specielt, at opholdstiden i et interval af længde l er

$$T = \frac{l}{v} \tag{8.15}$$

Dette giver det simple resultat, at opholdstiden er længden divideret med hastigheden. I det tilfælde hvor v ikke er konstant med afstanden x, bliver udregningen lidt mere kompliceret.

Man kan give et estimat på opholdstiden på følgende måde, idet man tilnærmelsesvis har at porevandshastigheden mellem P9 og åen kan udregnes vha Darcy's lov som

$$|v| = \frac{K_s}{\theta}\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{0.21}\frac{16.14 - 14}{314} = 9.7 \cdot 10^{-8}\, m/s \simeq 3.1\, m/yr \tag{8.16}$$

Herved fås at opholdstiden kan estimeres til:

$$T = l/|v| = \frac{314}{3.1}\, yr = 101\, yr\,. \tag{8.17}$$

Ved korrekt integration vil man se, at tiden bliver noget andet, da porevandshastigheden stiger dramatisk ned mod åen pga. den mindre mættede lagtykkelse, ligesom den er næsten nul på midten af transektet. For at gøre dette mere præcist finder man $v(x)$ ved at differentiere udtrykket for $h(x)$, jvf. ligning (8.16), hvor $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ er en tilnærmelse til den afledede. Derefter findes T ved integration, jvf. ligning (8.14).

Opgave 8.1

(a) Find porevandshastigheden, $v(x)$, og dermed opholdstiden T i det øvre grundvandsmagasin til åen, hvis partiklen "slippes løs" ved deponi 3, svarende til boring P9. For $h(x)$ benyttes den løsning man bestemte i **opgave 6.3**.

(b) Hvad sker der med opholdstiden hvis partiklen "begynder sin rejse" ved boring F6? For $h(x)$ benyttes den løsning man bestemte i **opgave 6.3**.

Opgave 8.2

(a) Overvej om disse resultater er følsomme overfor estimatet af K_s og K_m. Hvad sker der med opholdstiderne hvis de to parametre ændres uafhængigt af hinanden med f.eks. $\pm 10\%$?

Opgave 8.3

(a) Hvad sker der med opholdstiden hvis man benytter den simple model fra **opgave 7.2** (f.eks. et 3. gradspolynomium)? Er denne model realistisk?