Projekt: Selvkørende biler

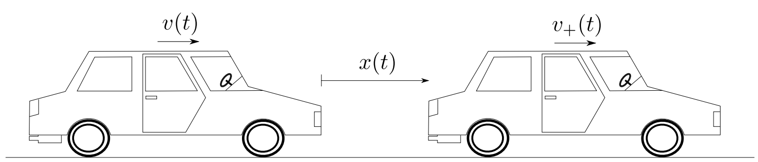
Køreplan (ba-dum-tss!)

01002 Mat 1b – FORÅR 2025

Af Kristian Uldall Kristiansen, DTU Compute

1 Baggrund

I dette projekt skal I kigge på en simpel model for selvkørende biler i en række, se Fig. 1, der defineres på følgende måde:



Figur 1: Selvkørende biler. I analysen tager vi ikke højde for bilernes størrelse og repræsenterer dem derfor som punkter.

Accelerationen af en bil i rækken, med hastighed $v(t)$ (målt i ms^{-1}) og afstand til den forankørende bil $x(t)$ (målt i m), er givet ved

$$a(t) = b(v_+(t) - v(t)) + c(x(t) - x_*(t)), \tag{1}$$

målt i ms^{-2}. Her angiver t tiden (målt i s), b og c er parametre (med enhederne s^{-1} og s^{-2}, hhv.), $v_+(t) > 0$ er hastigheden af den forankørende bil og $x_*(t) > 0$ er en ønsket afstand til den forankørende bil. Vi vil antage at

$$x_*(t) = Tv_+(t), \tag{2}$$

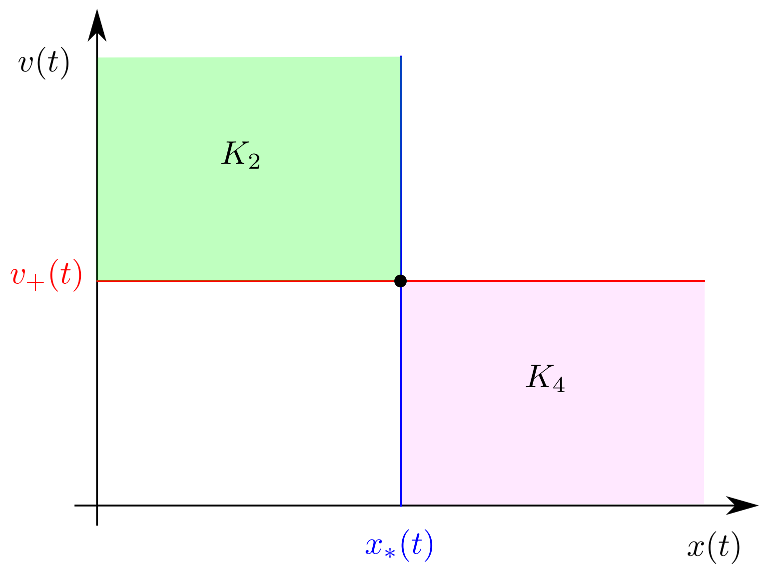
hvor T er en ny parameter (med enhed s).

Opgave 1: Afgumenter først for at $T > 0$. Dernæst, understreger vi, at tanken med modellen er, at bilen (vha dens motor og bremsesystem) skal følge accelerationen (1) og herigennem drive hastighed $v(t)$ og relative afstand $x(t)$ mod $v_+(t)$ og $x_*(t)$, hhv. Med udgangspunkt heri, betragt da Fig. 2 og angiv det ønskede fortegn for $a(t)$ i kvadranterne K_2 og K_4 i (x, v)-planen (evt også langs de røde og blå linjer). Hvad betyder det for fortegnene af b og c? ■

Vi antager nu, at $v_+ = v_+(t)$, $t \in \mathbb{R}$, er en kendt differentiabel funktion.

Opgave 2: Vis, at den relative afstand $x(t)$ tilfredsstiller en anden ordens lineær differentialligning på formen:

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = F(t), \tag{3}$$



Figur 2: Kvadranterne K_2 og K_4 relevante for opgave 1.

og at

$$v(t) = v_+(t) - x'(t).$$

Bestem funktionen F, udtrykt vha konstanterne c, T og funktionen $v_+(t)$. ■

Betragt nu det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c, \tag{4}$$

hørende til (3).

Opgave 3: (a): Bestem den fuldstændige reelle løsning til den homogene ligning hørende til (3). Det vil være nødvendigt at opdele analysen i tre særtilfælde $b < b_{kr}$, $b = b_{kr}$, $b > b_{kr}$, hvor $b_{kr} > 0$ skal bestemmes og karakteriseres. **(b)**: Givet dine fundne betingelser på b, c og T i dit svar på opgave 1, hvad kan du så sige om enhver løsning $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, til det homogene system, når $t \to \infty$? ■

I dit svar til opgave 3 vil der indgå to arbitrære konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Vi kalder disse konstanter for *integrationskonstanter*. De kan bestemmes udfra begyndelsesbetingelser $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$ med x_0 og x_1 givet.

Opgave 4: Vi betragter (3) med $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en kendt kontinuert funktion og antager først, at λ_1 og λ_2 er to simple rødder for P, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vis så, at

$$x^p(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t}\int_0^t F(s)e^{-\lambda_1 s}ds - e^{\lambda_2 t}\int_0^t F(s)e^{-\lambda_2 s}ds\right), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

er en partikulær løsning til (3) og at $x^p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, er reel. Mellemregninger skal medtages i et rimeligt omfang! ■

Hint: Hvad betyder det, at x^p er en partikulær løsning? Ift, at x^p er reel, vis at $x^p(t) = \overline{x^p}(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Her kan du bruge at b, c og $F(t)$, $t \in \mathbb{R}$, alle er reelle, og følgende regneregler for konjugering:

1. $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$, specielt $\overline{(z_1^{-1})} = \overline{z}_1^{-1}$.
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$.

3. $\overline{e^{z_1}} = e^{\overline{z}_1}$.

4. $\overline{\int_0^t f(s)ds} = \int_0^t \overline{f}(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$,

for alle komplekse tal $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ og alle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. OBS! Disse regneregler findes ikke i Mat1a noterne!

Opgave 5: Vi betragter igen (3) med $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en kendt kontinuert funktion og antager, at λ_1 er en dobbeltrod. Vis så, at

$$x^p(t) = te^{\lambda_1 t} \int_0^t F(s)e^{-\lambda_1 s} ds - e^{\lambda_1 t} \int_0^t F(s)se^{-\lambda_1 s} ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

er en partikulær løsning til (3). Hvorfor er $x^p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, reel? Mellemregninger skal medtages i et rimeligt omfang! ■

Opgave 6: Vis, at $x^p(0) = 0$ og $(x^p)'(0) = 0$. Du må gerne nøjes med at betragte tilfældet, hvor P (4) har to simple rødder λ_1 og λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. ■

Opgave 7: Opskriv nu den fuldstændige reelle løsning til (3). Du skal igen antage, at $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kendt kontinuert funktion. ■

1.1 En konvoj af biler

Vi betragter nu en uendelig konvoj af biler med en førende bil (som vi kalder $j = 0$), der kører med en kendt hastighed $v_0(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$. De bagvedkørende biler nummereres med $j \in \mathbb{N}$, således, at der for alle $j \in \mathbb{N}$ gælder følgende:

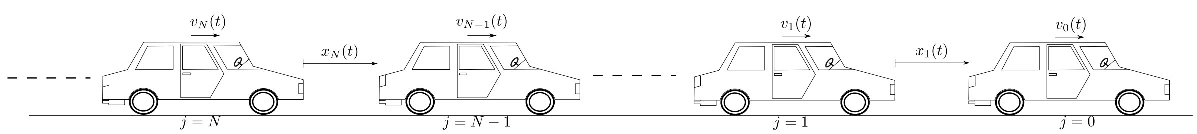
1. $x_j(t)$ angiver afstanden mellem bil $j - 1$ og den j'te bil.

2. $v_j(t)$ angiver hastigheden af den j'te bil.

3. Endelig er accelerationen $a_j(t)$ af den j'te bil givet ved udtrykket i (1) i den følgende form

$$a_j(t) = b(v_{j-1} - v_j) + c(x_j - Tv_{j-1}).$$

Se Fig. 3.



Figur 3: En konvoj af selvkørende biler. I analysen tager vi ikke højde for bilernes størrelse og repræsenterer dem derfor som punkter.

Opgave 8: Vis, at

$$\begin{cases} x_j''(t) + bx_j'(t) + cx_j(t) = v_{j-1}'(t) + cTv_{j-1}(t), \\ v_j(t) = v_{j-1}(t) - x_j'(t), \end{cases} \qquad \text{for alle} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

■

Vi antager nu, at $v_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, er konstant (som vi kalder $v_0 > 0$ herunder).

Opgave 9: Vis, at $x_j(t) = Tv_0$, $v_j(t) = v_0$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, er en løsning til systemet (7). ■

Vi kalder løsningen i opgave 9 en *stationær løsning*.

Modellen ovenfor har sine åbenlyse begrænsninger. For eksempel, så tager den ikke højde for at $x_j(t)$ og $v_j(t)$ er strengt positive. Men tanken er, at den kan være relevant (for nogle parameterværdier), når man ser på "små" afvigelser fra den stationære løsning.

Vi betragter derfor et begyndelsesværdiproblem defineret ved (7) og begyndelsesværdierne

$$x_j(0) = Tv_0, \quad x_j'(0) = \begin{cases} y_1 & \text{hvis } j = 1, \\ 0 & \text{hvis } j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \end{cases} \tag{8}$$

hvor $0 < y_1 < v_0$, for alle $j \in \mathbb{N}$. Bemærk, at

$$v_j(0) = \begin{cases} v_0 - y_1 & \text{hvis } j = 1, \\ v_0 & \text{hvis } j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \end{cases}$$

for alle $j \in \mathbb{N}$.

Opgave 10: **(a)**: Giv først en fortolkning af disse begyndelsesværdier. **(b)**: Betragt dernæst

$$v_0 = 20, \quad y_1 = 1, \quad c = 1, \quad T = \frac{1}{10}, \quad b = 2, \tag{9}$$

og udregn for disse værdier af parameterne løsningerne $x_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, og $v_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, vha dit svar på opgave 7 . I dit svar skal du bruge begyndelsesbetingelsen i (8) med $j = 1$ til at bestemme integrationskonstanterne c_1 og c_2 du har indført i dit svar på opgave 7. Det kan også være en fordel at bruge svaret i opgave 6. **(c)**: Bestem derefter $x_2(t), v_2(t)$, $x_3(t)$, $v_3(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ved at bruge (7) og (8) med $j = 2$ og $j = 3$ (igen for værdierne i (9)). **(d)**: Plot grafen for de fundne funktioner for $t \geq 0$, kommentér på resultatet, og **(e)**: undersøg om $x_1(t)$, $x_2(t)$ og $x_3(t)$ ($v_1(t)$, $v_2(t)$ og $v_3(t)$) konvergerer mod $Tv_0 = 2$ ($v_0 = 20$, hhv), svarende til værdierne for den stationære løsning, for $t \to \infty$. ■

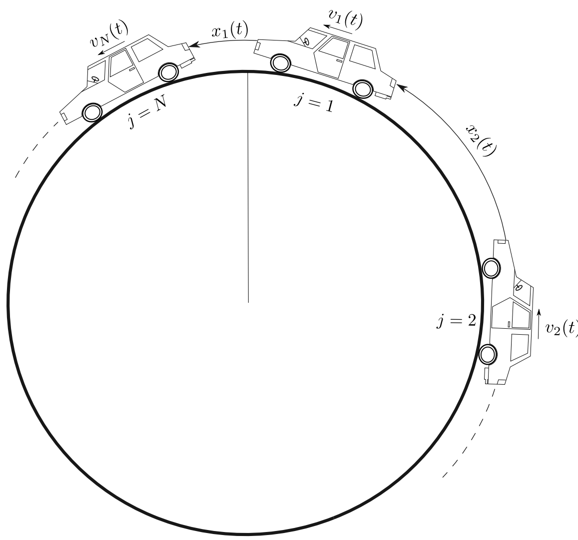
Vi vil nu opskrive en algoritme til at udregne løsningerne $x_j(t)$, $v_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, til (7) og (8), rekursivt. I din besvarelse af følgende opgave kan du nøjes med at antage, at rødderne λ_1 og λ_2 for P er simple rødder, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Opgave 11: **(a)**: Start med at løse for $x_1(t), v_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dine udtryk skal være fri for integrationskonstanter; du skal derfor igen bruge begyndelsesbetingelserne (og svaret i opgave 6) til at løse for integrationskonstanterne c_1 og c_2 (som funktioner af v_0 og y_1) i dine generelle løsningsformler fra dit svar på opgave 7. **(b)**: Beskriv dernæst en funktion, der tager funktionerne $x_{j-1}(t), v_{j-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, med $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, som input og returnerer funktionerne $x_j(t), v_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$, som output. Svaret skal igen være fri for integrationskonstanter (vha begyndelsesbetingelserne for $x_j(0)$, $x_j'(0)$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$). ■

Opgave 12: **(a)**: Antag, at $v_0 = 20$, $y_1 = 1$, $c = 1$, $T = \frac{1}{10}$, og undersøg løsningen til begyndelsesværdiproblemet defineret ved (7) og (8) for forskellige værdier af b. Du kan bruge Sympy til at anvende funktionen fra dit svar på opgave 11 rekursivt. **(b)**: Bestem om muligt et mindste $j \in \mathbb{N}$, hvorom der gælder, at der findes et $t > 0$ således, at $x_j(t) < 0$ eller $v_j(t) < 0$. Start evt med at kigge på værdierne $b = \frac{3}{2}$, $b = 2$ og $b = \frac{5}{2}$. Det kan være regnetungt, så betragt kun $j \lesssim 70$ og $0 \leq t \leq 100$. **(c)**: Diskutér resultatet. ■

1.2 Biler på en ring

I den resterende del af projektet, betragter vi $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, biler på en ring, der kører "imod urets retning". Vi nummererer bilerne som på en klokke: Hvis vi starter kl 12 og bevæger os i urets retning, så nummerer vi den første bil, som vi møder med $j = 1$, dernæst $j = 2$, osv. helt indtil $j = N$, se Fig. 4. På den måde, har vi nummereret alle N biler, men hvis vi fortsætter rundt forbi kl 12 igen, så møder vi bil $j = N + 1$, som jo er bil $j = 1$ igen. Vi kunne forsætte på denne måde og således *identificeres bil nummer* $j = k$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq N$, *med alle numrene* $j = k + nN$ *for alle* $n \in \mathbb{Z}$. Her angiver n antal gange (med fortegn) vi har bevæget os rundt. Hvis $n < 0$ så har vi bevæget os $-n \in \mathbb{N}$ gange rundt imod urets retning. Som før, så angiver $v_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$, hastigheden af den j'te bil, mens $x_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$, angiver den relative afstand (på ringen) mellem bil $j-1$ og bil j.



Figur 4: Selvkørende bil på en ring. I analysen tager vi ikke højde for bilernes størrelse og repræsenterer dem derfor som punkter.

Opgave 13: Forklar følgende påstand: $v_j = v_{j+nN}$ og $x_j = x_{j+nN}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. ■

Vi antager (igen), at accelerationen af bil j er givet ved

$$a_j(t) = b(v_{j-1}(t) - v_j(t)) + c(x_j(t) - Tv_{j-1}(t)).$$

Opgave 14: Definér vektor-funktionen

$$\mathbf{z}_j(t) = \begin{pmatrix} x_j(t) \\ v_j(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

for alle $j \in \mathbb{Z}$. Bestem $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ og $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ således, at

$$\mathbf{z}_j'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}_j(t) + \mathbf{B}\mathbf{z}_{j-1}(t), \tag{10}$$

for alle $j \in \mathbb{Z}$, specielt

$$\mathbf{z}_1'(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}_1(t) + \mathbf{B}\mathbf{z}_N(t). \tag{11}$$

■

Opgave 15: Definér

$$\mathbf{z}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vis, at

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t), \tag{12}$$

hvor $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$. $\mathbf{C}$ kan med fordel opbygges vha 2×2 matricer $\mathbf{C}_{i,j} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $i,j = 1,\dots,N$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1,1} & \cdots & \mathbf{C}_{1,N} \\ \vdots & \mathbf{C}_{i,j} & \vdots \\ \mathbf{C}_{N,1} & \cdots & \mathbf{C}_{N,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}.$$

Bestem alle $\mathbf{C}_{i,j}$ som er forskellige fra nul-matricen. ■

Opgave 16: Vis, at

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ T^{-1} \end{pmatrix}$$

udspænder $\ker(\mathbf{A}+\mathbf{B})$. Her angiver ker *kernen* af en matrix. Definér dernæst

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

og vis, at

$$\mathbf{v}_1 \in \ker \mathbf{C}.$$

■

Opgave 17: Argumentér herefter for at

$$\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{v}_1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

er en løsning til (12) for alle $c_1 \in \mathbb{R}$. ■

Vi siger, at en løsning $\mathbf{z}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, har ringlængde $R > 0$, såfremt

$$R := x_1(t) + \cdots + x_N(t).$$

Opgave 18: Giv en fortolkning og vis, at R er en konstant. **Hint**: Vis først, at $x_1'(t) + \cdots + x_i'(t) = v_N(t) - v_i(t)$ for alle $i \in \mathbb{N}$, vha induktion. Brug $i = 1$: $x_1'(t) = v_N(t) - v_1(t)$ som induktionsstart.

Opgave 19: Bestem konstanten $c_1 = c_1(R)$ således, at (14) har ringlængde R. ■

Løsningen i (14) med $c_1 = c_1(R)$ kaldes igen den *stationære løsning* (med ringlængde $R > 0$). Som i tilfældet af en konvoj, så er det den ønskede tilstand for systemet. Vi er derfor interesseret i at afgøre stabilitet af de stationære løsninger, *specielt bestemme parametere således, at den stationære løsning (14) er stabil (gerne for alle N).*

Vi vil her forstå stabilitet på følgende måde:

Definition af (asymptotisk) stabilitet: *Den stationære løsning med ringlængde $R > 0$ er* asymptotisk stabil*, såfremt, der gælder følgende for alle løsninger $\boldsymbol{z}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, til (12) med ringlængde $R > 0$:*

$$|\boldsymbol{z}(t) - c_1(R)\boldsymbol{v}_1| \to 0 \quad \textit{for} \quad t \to \infty.$$

På den anden side, hvis der findes en løsning $\boldsymbol{z}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, med ringlænde $R > 0$ således, at $|\boldsymbol{z}(t) - c_1(R)\boldsymbol{v}_1| \to \infty$ for $t \to \infty$, så siges den stationære løsning med ringlængde $R > 0$ at være ustabil. □

Bemærk (til baggrund): *Der er en tredje mulighed, hvor* $\boldsymbol{z}(t) - c_1(R)\boldsymbol{v}_1$ *hverken vokser ubegrænset (mht normen* $|\cdot|$*) eller går mod nul for* $t \to \infty$*, men blot er begrænset for alle løsninger* $\boldsymbol{z}(t)$, $t \in \mathbb{R}$*, med ringlængde* R *og alle* $t \geq 0$*. Dette tilfælde kunne vi kalde "marginal stabilitet", men vi vil ikke bekymre os om dette "særtilfælde" i projektet. Vi skal udelukkende fokusere på om den stationære løsning er asymptotisk stabil eller ustabil.* □

Vi vil anvende følgende sætning (uden bevis):

Sætning A: *Lad* $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2N} \in \mathbb{C}^{2N}$ *angive egenværdierne af* $\boldsymbol{C}$ *(med multiplicitet). Så gælder følgende:* ***(i)****: Den stationære løsning er asymptotisk stabil, hvis og kun hvis*

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \textit{for alle } i = 2, \ldots, 2N. \tag{15}$$

(ii)*: Omvendt, hvis der findes en egenværdi* λ_i, $i = 2, \ldots, 2N$*, med* $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$*, så er den stationære løsning ustabil.* □

Bemærk: *Stabilitet er uafhængig af ringlængden* R*.* □

Bemærk (til baggrund): *Såfremt* $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ *for alle* $i = 1, \ldots, 2N$*, så kan den stationære løsning enten være ustabil eller hvad vi kaldte "marginal stabil" ovenfor. Detaljerne kræver i dette tilfælde en nærmere undersøgelse.* □

Opgave 20: Anvend Mat1b-lærebogens kapitel 12 til at vise, at betingelsen (15) er tilstrækkelig for asymptotisk stabilitet (se **(i)** i **Sætning A**). Du kan i din besvarelse antage, at $\mathbf{C}$ kan diagonaliseres med egenværdier $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2N}$ og $2N$ dertilhørende lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{2N}$. ■

Vi vil nu forsøge at bestemme de resterende egenværdier $\lambda_2, \ldots, \lambda_{2N} \in \mathbb{C}$ (med multiplicitet) for $\mathbf{C}$:

Lad $\omega \in \mathbb{C}$ være således, at

$$\omega^N = 1. \tag{16}$$

Opgave 21: Vis, at alle løsninger til (16) kan skrives på formen

$$\omega = e^{i\theta} \quad \text{hvor} \quad \theta = \frac{2\pi n}{N}, \, n = 0, \ldots, N-1. \tag{17}$$

■

Opgave 22: Bestem dernæst $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\omega) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ således, at

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \omega^{N-1}\mathbf{w} \\ \omega^{N-2}\mathbf{w} \\ \vdots \\ \omega^{N-j}\mathbf{w} \\ \vdots \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{C}^2, \tag{18}$$

er en egenvektor for $\mathbf{C}$ med tilhørende egenværdi λ, hvis og kun hvis

$$\mathbf{D}\mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}.$$

Hint: Brug blok-strukturen af $\mathbf{C}$, se dit svar på opgave 15. ■

Vi betragter først tilfældet $\omega = 1$:

Opgave 23: Vis, at $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = -cT$ er egenværdierne for $\mathbf{D}(1)$. Bestem de dertilhørende egenvektorer $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ og sammenhold $\mathbf{w}_1$ med svaret på opgave 16. ■

Opgave 24: Bestem egenværdierne $\Lambda_1(\theta)$ og $\Lambda_2(\theta)$ af $\mathbf{D}(e^{i\theta})$. Vælg her $\Lambda_1(\theta)$ således, at $\Lambda_1(0) = \lambda_1 = 0$ og $\Lambda_2(0) = \lambda_2 = -cT$ (se opgave 23). ■

Det er nu muligt at nå følgende konklusion:

Sætning B: *Egenværdierne for $\boldsymbol{C}$ kan skrives på listeformen $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -cT, \lambda_3, \ldots, \lambda_{2N} \in \mathbb{C}$ (med multiplicitet), hvor $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = -cT$ fremkommer ved $\theta = 0$ jvf opgave 23. De resterende egenværdier $\lambda_3, \ldots, \lambda_{2N}$ er givet ved udtrykkene for $\Lambda_1(\theta)$ og $\Lambda_2(\theta)$ for de $N-1$ forskellige værdier af $\theta = \frac{2\pi n}{N}$, $n = 1, \ldots, N-1$ ($\theta \neq 0$).* □

Opgave 25: (a): Undersøg asymptotisk stabilitet (evt i Sympy) vha graferne for $\mathrm{Re}(\Lambda_1(\theta))$ og $\mathrm{Re}(\Lambda_2(\theta))$, som funktioner af $\theta \in [0, 2\pi]$, for $c = 1, T = 1$, og tre forskellige værdier af b: $b = 1$, $b = \frac{3}{2}$ og $b = 2$. **(b)**: Specielt, såfremt du finder et θ således, at $\mathrm{Re}(\Lambda_i(\theta)) > 0$ for $i = 1$ eller $i = 2$, bestem da (om muligt) en kritisk værdi N_{kr} således, at systemet er ustabilt for alle $N > N_{kr}$ og asymptotisk stabilt for alle $N < N_{kr}$. ■

Vi vil nu bestemme en skærpet nødvendig betingelse for stabilitet (for alle N).

Opgave 26: (a): Lad $\Lambda_1(\theta) \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$, angive egenværdien af $\mathbf{D}(e^{i\theta})$ i opgave 24 med $\Lambda_1(0) = 0$. Bestem Taylor polynomiet $P_2(\theta)$ af grad 2 for funktionen $\Lambda_1(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, med udviklingspunkt i $\theta = 0$, se Definition 4.2.1 i Mat1b lærebogen. **(b)**: Bestem dernæst $b_{kr,ny}$ således, at $\mathrm{Re}\, P_2(\theta) < 0$ for alle $\theta \neq 0$ hvis og kun hvis

$$b > b_{kr,ny}. \tag{19}$$

■

Opgave 27: Undersøg (numerisk) hvorvidt (19) er en tilstrækkelig betingelse for asymptotisk stabilitet for alle $N \in \mathbb{N}$. ■