

I denne opgave skal vi studere vektoranalyse med anvendelse i elektromagnetisme. Vi postulerer uden forklaring elektromagnetismens styrende ligninger for det elektriske felt \mathbf{E} (kraft pr. ladning) og det magnetiske felt \mathbf{B} (kraft pr. ladning pr. hastighed), og derfter anvender vi vektoranalyse til at belyse forskellige matematiske sammenhænge.

1 Matematisk notation

Vi benytter følgende matematiske notation i denne opgave. Enhedsvektorerne i de tre kartesiske koordinatretninger kaldes \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y og \mathbf{e}_z . De **partielle afledede** efter tids- og rumkoordinaterne angives med en kompakt notation som

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z. \quad (1)$$

Her har vi indført **vektoroperatoren** “ ∇ ”, kaldet “**nabla**” (efter oldgræsk “harpe”, da symbolet ligner en lille harpe), som viser sig at være meget praktisk. Vi kan se, at nabla har tre komponenter ligesom en almindelig vektor, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x a_x + \mathbf{e}_y a_y + \mathbf{e}_z a_z$, og nabla har endda flere ligheder med vektorer, som vi skal se i løbet af denne opgave.

Taylor-udvikling af en skalarfunktion $f(x)$ af én variabel omkring punktet x_0 til første orden i den lille ændring Δx er,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \partial_x f(x_0) + \mathcal{O}((\Delta x)^2), \text{ hvor der evalueres i } x_0 \text{ efter differentiationen.} \quad (2)$$

Taylor-udvikling af en skalarfunktion $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$ af tre variable omkring punktet $\mathbf{r}_0 = \mathbf{e}_x x_0 + \mathbf{e}_y y_0 + \mathbf{e}_z z_0$ til første orden i den lille ændring $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{e}_x \Delta x + \mathbf{e}_y \Delta y + \mathbf{e}_z \Delta z$ indeholder naturligvis tre bidrag til tilvæksten til $f(\mathbf{r}_0)$, ét for hver variabel svarende til den ene tilvækst $\Delta x \partial_x f(x_0)$ til $f(x_0)$ i Lign. (2),

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \Delta x \partial_x f(\mathbf{r}_0) + \Delta y \partial_y f(\mathbf{r}_0) + \Delta z \partial_z f(\mathbf{r}_0) + \mathcal{O}(|\Delta \mathbf{r}|^2) \quad (3a)$$

$$= f(\mathbf{r}_0) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) f(\mathbf{r}_0) + \mathcal{O}(|\Delta \mathbf{r}|^2), \text{ evaluér i } \mathbf{r}_0 \text{ efter differentiation.} \quad (3b)$$

Her er den kompakte skalarprodukt (prikprodukt) notation $\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y + \Delta z \partial_z = \Delta \mathbf{r} \cdot \nabla$ kendt fra sædvanlige vektorer, $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ blevet brugt i sidste linje. Bemærk hvor kompakt, men stadig entydig, notationen bliver ved brug af nabla-operatoren “ ∇ ”. For en vektorfunktion $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x V_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y V_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z V_z(x, y, z)$ af tre variable, får vi endnu større glæde af den kompakte notation. Taylor-udvikling af $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ omkring punktet \mathbf{r}_0 til første orden i den lille ændring $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{e}_x \Delta x + \mathbf{e}_y \Delta y + \mathbf{e}_z \Delta z$ udføres komponentvis svarende til Lign. (3), og vi får,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) = \mathbf{e}_x V_x(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) + \mathbf{e}_y V_y(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) + \mathbf{e}_z V_z(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \quad (4a)$$

$$= \mathbf{e}_x [V_x(\mathbf{r}_0) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) V_x(\mathbf{r}_0)] + \mathbf{e}_y [V_y(\mathbf{r}_0) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) V_y(\mathbf{r}_0)] \\ + \mathbf{e}_z [V_z(\mathbf{r}_0) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) V_z(\mathbf{r}_0)] \quad (4b)$$

$$= \mathbf{V}(\mathbf{r}_0) + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{r}_0), \text{ hvor der evalueres i } \mathbf{r}_0 \text{ efter differentiation.} \quad (4c)$$

Bemærk den strukturelle lighed mellem Lign. (2) og (4c), mens en konkret udregning af sidstnævnte stadig kræver brug af de omfattende udtryk i Lign. (2) og (4a).

I lighed med skalarproduktet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og krydsproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ kommer vi også naturligt (ja, vent og se) til at indføre den såkaldte **divergens** $\nabla \cdot \mathbf{V}$ og **rotation** $\nabla \times \mathbf{V}$ af et vektorfelt $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ som,

$$\text{Divergensen af } \mathbf{V}: \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z. \quad (5a)$$

$$\text{Rotationen af } \mathbf{V}: \quad \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{e}_x (\partial_y V_z - \partial_z V_y) + \mathbf{e}_y (\partial_z V_x - \partial_x V_z) + \mathbf{e}_z (\partial_x V_y - \partial_y V_x). \quad (5b)$$

Betragt en kurve $\mathcal{C}(p)$ i rummet med længdeelementet dr , parameterfremstillingen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p)$, Jacobianten $|\partial_p \mathbf{r}|$, og tangentvektoren $\mathbf{t} = \partial_p \mathbf{r} / |\partial_p \mathbf{r}|$, hvor $p \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ er et 1D parameterinterval. Kurveintegralet over \mathcal{C} for henholdsvis et skalarfelt $f(\mathbf{r})$ og et vektorfelt $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ defineres da som

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{r}) dr = \int_a^b f(\mathbf{r}(p)) |\partial_p \mathbf{r}| dp, \quad (6a)$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} dr = \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{r}(p)) \cdot \partial_p \mathbf{r} dp. \quad (6b)$$

Betragt en flade $\mathcal{S}(p, q)$ i rummet med arealelementet da , parameterfremstillingen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p, q)$, Jacobianten $|\partial_p \mathbf{r} \times \partial_q \mathbf{r}|$, og normalvektoren $\mathbf{n} = (\partial_p \mathbf{r} \times \partial_q \mathbf{r}) / |\partial_p \mathbf{r} \times \partial_q \mathbf{r}|$, hvor $\{p, q\} \in P \subset \mathbb{R}^2$ er et 2D parameterdomæne. Fladeintegralet over \mathcal{S} for henholdsvis et skalarfelt $f(\mathbf{r})$ og et vektorfelt $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ defineres da som

$$\int_{\mathcal{S}} f(\mathbf{r}) da = \int_P f(\mathbf{r}(p, q)) |\partial_p \mathbf{r} \times \partial_q \mathbf{r}| dp dq, \quad (7a)$$

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} da = \int_P \mathbf{v}(\mathbf{r}(p, q)) \cdot (\partial_p \mathbf{r} \times \partial_q \mathbf{r}) dp dq. \quad (7b)$$

Betragt et volumen $\mathcal{V}(s, p, q)$ i rummet med volumenelementet $d\tau$, parameterfremstillingen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, p, q)$ og Jacobianten $|\partial_s \mathbf{r} \cdot (\partial_p \mathbf{r} \times \partial_q \mathbf{r})|$, hvor $\{s, p, q\} \in Q \subset \mathbb{R}^3$ er et 3D parameterdomæne. Volumenintegralet over \mathcal{V} for henholdsvis et skalarfelt $f(\mathbf{r})$ og et vektorfelt $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ defineres da som

$$\int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{r}) d\tau = \int_Q f(\mathbf{r}(s, p, q)) |\partial_s \mathbf{r} \cdot (\partial_p \mathbf{r} \times \partial_q \mathbf{r})| ds dp dq, \quad (8a)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\tau = \int_Q \mathbf{v}(\mathbf{r}(s, p, q)) |\partial_s \mathbf{r} \cdot (\partial_p \mathbf{r} \times \partial_q \mathbf{r})| ds dp dq. \quad (8b)$$

2 Introduktion: basale elektromagnetiske begreber og felter

Betragt en elektrisk punktladning q , f.eks. en elektron, som på et givet tidspunkt t bevæger sig med hastigheden \mathbf{v}_q idet den passerer punktet \mathbf{r} . Den samlede elektromagnetiske kraft \mathbf{F}_q på partiklen er da givet ved summen af den elektriske kraft $\mathbf{F}_q^{\text{elek}}$ og den magnetiske kraft $\mathbf{F}_q^{\text{magn}}$

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_q^{\text{elek}} + \mathbf{F}_q^{\text{magn}} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad \text{Lorentzkraften på ladningen } q. \quad (9)$$

Denne kraftlov definerer de to basale vektorfelter i elektromagnetismen, det elektriske felt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (kraft pr. ladning) og det magnetiske felt $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (kraft pr. ladning pr. hastighed). Disse to vektorfelter antages at være differentiable i ethvert punkt \mathbf{r} i rummet og til alle tider t .

Et centralt teorem i vektoranalysen, Helmholtz' teorem, siger, at et givet passende differentiabelt vektorfelt \mathbf{V} er fuldt bestemt, hvis dets divergens $\nabla \cdot \mathbf{V}$ og dets rotation $\nabla \times \mathbf{V}$ er kendte. En konsekvens heraf er, at der er fire styrende ligninger i elektromagnetismen, nemlig ligninger for $\nabla \cdot \mathbf{E}$, $\nabla \cdot \mathbf{B}$, $\nabla \times \mathbf{E}$ og $\nabla \times \mathbf{B}$.

I de omtrent 120 år fra 1740'erne frem til 1860 fandt man de fleste af elektromagnetismens love, der kan opsummeres som følger. Der findes to typer ladninger kaldet positive og negative. Ladning er bevaret, idet den hverken kan skabes eller tilintetgøres, men blot kan flyttes rundt. Man kan tænke på ladning som diskrete punktladninger eller som en kontinuert ladningstæthed $\rho(\mathbf{r}, t)$ (ladning pr. volumen), som kan ændre sig i rum og tid. Rundt om enhver ladning er der et elektrisk felt (Coulombs og Gauss' love), og det samlede elektriske felt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i punktet \mathbf{r} til tiden t er givet som summen af disse elementære elektriske felter (superpositionsprincippet). Der findes ikke magnetiske monopoler ("ladninger"), som skaber magnetfelter, til gengæld skaber en elektrisk strømtæthed $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ (ladning pr. areal pr. tid) et magnetisk felt $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (Ørsteds og Ampères love). Endelig viser det sig, at elektriske

felter ikke kun skabes af lokale ladningstætheder, men også ved tidsvariende magnetiske felter (Faraday's induktionslov). Omkring 1860, mente man, at de fire styrende ligninger i elektromagnetismen havde følgende form, som vi kan kalde **de præ-Maxwell'ske ligninger**,

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & (\text{Gauss' lov}). & & (ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & (\text{ingen monopoler}). \\
 (iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & (\text{Faraday's lov}). & & (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, & (\text{Ampères lov}).
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Det er den matematiske struktur af dette ligningssystem, som vi skal studere i denne opgave. Især kommer vi til at modificere Ampères lov (10-iv), en modifikation som Maxwell i årene 1861-65 opdagede var nødvendig, og som førte til den endelige nugældende formulering af elektromagnetismens fire Maxwell ligninger. Maxwell's modifikation afklarede ikke blot inkonsistenser i den daværende elektromagnetiske teori, men ledte også til, at Maxwell forudsagde eksistensen af elektromagnetiske bølger (som først blev påvist eksperimentelt 26 år senere), og at alle elektriske, magnetiske og optiske fænomener kunne forklares med én forenet teori, Maxwell's elektromagnetiske teori. Og ikke nok med det, men kun 40 år efter Maxwell's teori blev lanceret, dannede den grundlaget for Einsteins specielle relativitetsteori.

3 Gauss' teorem (divergensteoremet)

Gauss' teorem (Joseph-Louis Lagrange [1773] og Carl Friedrich Gauss [1835]), også kaldet divergensteoremet, er et centralt teorem i vektoranalysen. For et givent område Ω i rummet knytter det **fluxintegralet af et vektorfelt** på overfladen $\partial\Omega$ med udadvendt overfladenormal \mathbf{n} , sammen med **divergensen af feltet** i hele Ω . For et passende differentiabelt vektorfelt $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ defineret i hele rummet, gælder der for et vilkårligt delområde Ω af rummet,

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\tau, \quad \text{Gauss' teorem, hvor} \tag{11a}$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = \Phi(\mathbf{J}, \partial\Omega), \quad \text{er fluxintegralet af } \mathbf{J} \text{ over } \partial\Omega, \tag{11b}$$

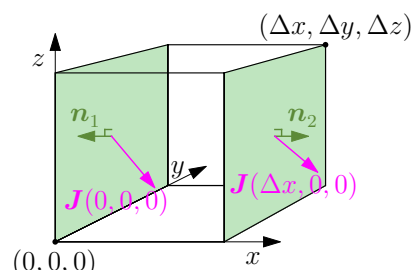
$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\tau = \mathcal{V}(\nabla \cdot \mathbf{J}, \Omega), \quad \text{er volumenintegralet af } \nabla \cdot \mathbf{J} \text{ over } \Omega, \text{ og} \tag{11c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z. \quad \text{er divergensen af } \mathbf{J} \text{ i kartesiske koordinater.} \tag{11d}$$

I det følgende skal vi bevise dette teorem ved brug af den (infinitesimalt) lille rektangulære boks $\Delta\Omega$ vist i Fig. 1 med sidelængder Δx , Δy og Δz , volumen $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$ og de seks overfladearealer Δa_i hvert med sin udadpegende normalvektor \mathbf{n}_i : $\mathbf{n}_1 \Delta a_1 = -\mathbf{e}_x \Delta y \Delta z$, $\mathbf{n}_2 \Delta a_2 = +\mathbf{e}_x \Delta y \Delta z$, ..., og $\mathbf{n}_6 \Delta a_6 = +\mathbf{e}_z \Delta x \Delta y$.

Opg. 1: Udtryk fluxintegralet $\Phi(\mathbf{J}, \Delta\Omega) = \oint_{\partial(\Delta\Omega)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = \sum_{i=1}^6 \int_{\Delta a_i} \mathbf{J}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i \, da_i$ som en sum af seks bidrag, ét fra hver flade, og bring derefter de tre par af modstående fladeintegraler sammen, hvor integranden er henholdsvis $J_x(\mathbf{r})$, $J_y(\mathbf{r})$, $J_z(\mathbf{r})$.

Opg. 2: Bevis Gauss' teorem for $\Delta\Omega$ ved i ovenstående fladeintegraler at Taylor-udvikle integranderne til laveste orden i Δx , Δy og Δz , f.eks. $J_x(\Delta x, y, z) \approx J_x(0, y, z) + \partial_x J_x(0, y, z) \Delta x$ og tilsvarende for $J_y(x, \Delta y, z)$ og $J_z(x, y, \Delta z)$.



Figur 1: Gauss boksen $\Delta\Omega$.

Opg. 3: Vis Gauss' teorem for et vilkårligt område Ω , ved at opdele det i et meget stort antal infinitesimalt små bokse, hver som i Fig. 1, og argumentér for den parvise annullering af $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ på alle indre grænseflader mellem nabobokse. Vink: Benyt Riemanns integralbegreb.

Begrebet divergens $\nabla \cdot \mathbf{J}$ af et vektorfelt \mathbf{J} er introduceret på grund af dets rolle i Gauss' teorem. Som et alternativ til definitionen (11d) i eksplicitte kartesiske koordinater, kan man definere **divergensen** $\nabla \cdot \mathbf{J}$ i følgende koordinatfrie form, som en grænseværdi af **fluxintegralet pr. volumen**,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{J}, \Delta\Omega)}{\Delta\tau(\Delta\Omega)}, \quad \mathbf{r} \text{ er centrum i } \Delta\Omega. \quad (12)$$

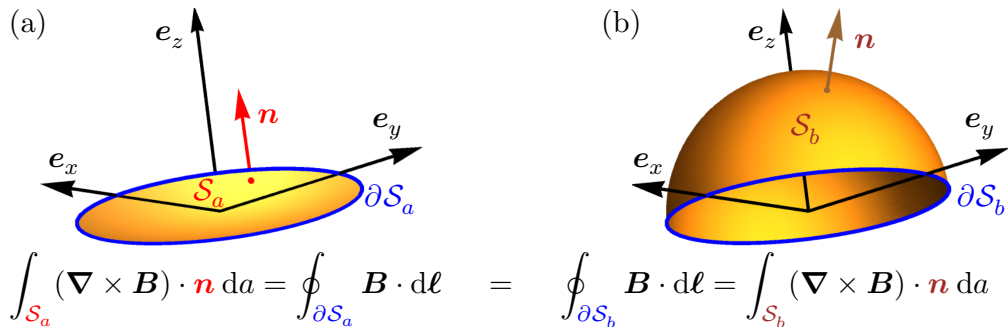
4 Stokes' teorem (rotationsteoremet)

Stokes' teorem [George Green, William Thompson (Lord Kelvin), George G. Stokes (1828-1850)], også kaldet rotationsteoremet, er et andet centralt teorem i vektoranalysen. For en given overflade \mathcal{S} i rummet begrænset af randkurven $\partial\mathcal{S}$ knytter det **cirkulationsintegralet af et vektorfelt** på randkurven $\partial\mathcal{S}$, sammen med **rotationen af feltet** på hele overfladen \mathcal{S} . For et passende differentiabelt vektorfelt $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ defineret i hele rummet, gælder der for en vilkårlig overflade \mathcal{S} i rumme, se Fig. 2,

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dr = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \, da = \Phi(\nabla \times \mathbf{B}, \mathcal{S}), \quad \text{Stokes' teorem, hvor} \quad (13a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_x(\partial_y B_z - \partial_z B_y) + \mathbf{e}_y(\partial_z B_x - \partial_x B_z) + \mathbf{e}_z(\partial_x B_y - \partial_y B_x),$$

er rotationen af \mathbf{B} i kartesiske koordinater og \mathbf{n} er fladenormalen. (13b)



Figur 2: To flader \mathcal{S}_a og \mathcal{S}_b i rummet begrænset af samme rand, $\partial\mathcal{S}_a = \partial\mathcal{S}_b$ (blå kurve). I det konkrete eksempel er randkurven en cirkel med radius R , \mathcal{S}_a er en cirkulær flade i xy -planen med radius R , og \mathcal{S}_b er halvkuglefladen med radius R i den positive halvplan $z \geq 0$. Da \mathcal{S}_a og \mathcal{S}_b er begrænset af samme rand, medfører Stokes' teorem, at fluxintegralerne over de to flader af rotationen $\nabla \times \mathbf{B}$ af et vilkårligt vektorfelt \mathbf{B} er identiske, $\Phi(\nabla \times \mathbf{B}, \mathcal{S}_a) = \Phi(\nabla \times \mathbf{B}, \mathcal{S}_b)$.

I det følgende skal vi bevise dette teorem ved brug af den (infinitesimalt) lille flade, den retvinklede trekant $\Delta\mathcal{S}$ i xy -planen vist i Fig. 3, dannet af hjørnepunkterne A $(0,0,0)$, B $(\Delta x, 0, 0)$, og C $(\Delta x, \Delta y, 0)$. $\Delta\mathcal{S}$ har vinklerne $\angle A = \alpha$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ og $\angle C = \frac{\pi}{2} - \alpha$ samt arealet $\Delta a = \frac{1}{2}\Delta x \Delta y$. Sidelængderne i trekant ABC er hypotenusen $|AC| = \Delta L$ samt katederne $|AB| = \Delta x = \Delta L \cos \alpha$ og $|BC| = \Delta y = \Delta L \sin \alpha$. Med udgangspunkt i definitionen (6b) vælger vi parameterfremstillingen af de tre sider til henholdsvis $\mathbf{r}_{AB}(p) = p \mathbf{e}_x$ med p fra 0 til Δx , $\mathbf{r}_{BC}(p) = \Delta x \mathbf{e}_x + p \mathbf{e}_y$ med p fra 0 til Δy , og $\mathbf{r}_{CA}(p) = p \cos \alpha \mathbf{e}_x + p \sin \alpha \mathbf{e}_y$ med p fra ΔL til 0. Sidernes tangentvektorer kaldes \mathbf{t} .

Opg. 4: Opdel cirkulationsintegralet for \mathbf{B} på randen $\partial\Delta\mathcal{S}$

i tre bidrag $\oint_{\partial\Delta\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, dr = \int_0^{\Delta x} \mathbf{B}(\mathbf{r}_{AB}(p)) \cdot \partial_p \mathbf{r}_{AB}(p) dp + \int_0^{\Delta y} \mathbf{B}(\mathbf{r}_{BC}(p)) \cdot \partial_p \mathbf{r}_{BC}(p) dp + \int_{\Delta L}^0 \mathbf{B}(\mathbf{r}_{CA}(p)) \cdot \partial_p \mathbf{r}_{CA}(p) dp$, og vis, at i grænsen $\Delta L \rightarrow 0$ fås $\oint_{\partial\Delta\mathcal{S}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} \, dr \approx (\partial_x B_y(\mathbf{0}) - \partial_y B_x(\mathbf{0})) \Delta a$. Vink: I integranderne benyttes Taylor-udviklingen $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{B}(\mathbf{0}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{0})$ gyldig for $0 \leq r \leq \Delta L$, idet led af ordenen $(\Delta L)^2$ og højere negligeres.

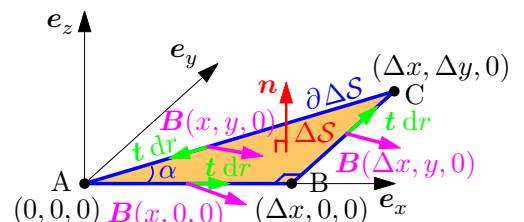


Figure 3: Stokes fladen $\Delta\mathcal{S}$, trekant ABC.

Opg. 5: Vis Stokes' teorem for en vilkårlig krum flade \mathcal{S} begrænset af den lukkede kurve $\partial\mathcal{S}$, ved først at vælge et stort antal tætliggende punkter fordelt på fladen og dens rand $\partial\mathcal{S}$. Lad dernæst nærmestliggende punkter udgøre hjørnerne i mange små trekanter, der således tilsammen danner en facetteret overflade der approximativt er lig med \mathcal{S} . Overvej hvorledes ikke-retvinklede trekanter kan opdeles i to retvinklede trekanter, således at den endelige facetterede overflade består af N retvinklede trekanter $\Delta\mathcal{S}_i$, hver med sin rand $\partial\Delta\mathcal{S}_i$ og sit lokale koordinatsystem svarende til Fig. 3. Redegør kort for den parvise kancellering af kurveintegralerne på alle indre grænseflader mellem nabotrekanter, også selvom disse ikke ligger i samme plan. Vink: Benyt Riemanns integralbegreb.

Begrebet rotation $\nabla \times \mathbf{B}$ af et vektorfelt \mathbf{B} er introduceret på grund af dets rolle i Stokes' teorem. Som et alternativ til definitionen (13b) i eksplicitte kartesiske koordinater, kan man definere **rotationen** $\nabla \times \mathbf{B}$ i koordinatfri form, som en grænseværdi af **cirkulationsintegralet pr. areal**,

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta\mathcal{S} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial\Delta\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta a(\Delta\mathcal{S})}, \quad \mathbf{r} \text{ er centrum i } \Delta\mathcal{S}. \quad (14)$$

5 Integralsætninger: Coulombs og Ørsted–Ampères love

I 1785 publicerede Charles-Augustin de Coulomb sin berømte lov for den elektrostatiske kraft mellem to ladninger: Kraften virker i en retning parallel med linjen som forbinder de to ladninger, og den er proportional med den inverse af kvadratet på afstanden mellem ladningerne. Betragt en punktførmig kildeladning Q anbragt i origo $\mathbf{0}$, og en testladning q i et vilkårligt punkt \mathbf{r} , da kan kraften på q i \mathbf{r} fra Q i $\mathbf{0}$ skrives som

$$\mathbf{F}_{q \leftarrow Q}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad \text{med } \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{r} \text{ og } \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V m}}, \quad (15)$$

Vi skal nu vise ved brug af divergensteoremet, at denne lov er indeholdt i Gauss' lov (10-i).

Opg. 6: Fra Gauss' lov (10-i) til Coulombs lov. Udtryk kraften fra Q på q som $\mathbf{F}_{q \leftarrow Q}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$, og bestem det elektriske felt $\mathbf{E}_Q(\mathbf{r})$ fra punktladningen Q i origo ved hjælp af et testvolumen Ω i form af en kugle K_r med radius r og centrum i origo. Vink: integrer Lign. (10-i) over $\Omega = K_r$, benyt divergensteoremet, og udnyt følgende tre fakta: (1) Den samlede ladning indeholdt i K_r er Q for alle værdier af r , (2) den sfæriske symmetri af punktladningen Q medfører, at det elektriske felt kun har en radial komponent, $\mathbf{E}_Q(\mathbf{r}) = E_r(r) \mathbf{e}_r$, og (3) for fladenormalen på ∂K_r gælder $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$.

Ligheden mellem Coulombs kraftlov (15) fra 1785 og Newton's lov om den universelle gravitation-slov mellem to punktmasser m i \mathbf{r} og M i $\mathbf{0}$, $\mathbf{F}_{m \leftarrow M}(\mathbf{r}) = G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r$ publiceret næsten hundrede år tidligere i 1687, gav datidens naturfilosoffer en stærk tro på, at samtlige naturlove kunne reduceres til sådanne inverse-afstandskvadrat-love langs partiklernes forbindelseslinjer. Endvidere mente man, at elektriske og magnetiske fænomener var helt uafhængige af hinanden. Det var derfor en radikalt banebrydende opdagelse, som Hans Christian Ørsted gjorde i 1820, da han for det første påviste, at en elektrisk strøm genererer et magnetfelt, og dernæst at dette magnetfelt påvirkede en magnetnål med en kraft *vinkelret* på strømmens retning. I løbet af kort tid samme år blev især de franske fysikeres skepsis forvandlet til en solid matematisk teori udviklet af primært André-Marie Ampère, Jean Baptiste Biot og Felix Savart. Sendes en elektrisk strøm I (ladning pr. tid) gennem en (uendelig) lang cylinderformet ledning med radius a anbragt langs z -aksen, vil der opstå et magnetfelt \mathbf{B} omkring lederen. Anvender vi cylindriske koordinater $\mathbf{r} = (s, \varphi, z)$, hvor s er den vinkelrette afstand til z -aksen og φ den sædvanlige azimuthalvinkel, kan det resulterende magnetfelt $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ i observationspunktet \mathbf{r} udenfor ledningen skrives som

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \mathbf{e}_\varphi, \quad \text{for } s > a, \quad \text{Ørsted–Ampères lov.} \quad (16)$$

Opg. 7: Symmetrianalyse. Antag, at strømmen I i den lange tynde ledning er dannet af en rotationssymmetrisk strømtæthed uafhængig af z -koordinaten, $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_z(s) \mathbf{e}_z$. Argumentér først for, at systemets symmetri medfører, at magnetfeltet kun kan afhænge af radialkoordinaten s , $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(s)$. Vis så, at $B_s(s) = 0$, ved at betragte \mathbf{B} omkring ledningen efter at have udført følgende to transformationer, som bringer systemet tilbage til sit udgangspunkt: (1) Vend strømretningen i ledningen, hvorved $\mathbf{B}(s)$ skifter fortegn. (2) Rotér ledningen 180° omkring x -aksen. Vis til sidst, at Ampères lov (10-iv) med $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_z(s) \mathbf{e}_z$ medfører, at $B_z(s)$ er konstant, og faktisk 0 da \mathbf{B} går mod nul langt fra ledningen. Altså er det vist, at den endelige form af magnetfeltet er $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\varphi(s) \mathbf{e}_\varphi$.

Opg. 8: Vis Lign. (16) ved at kombinere Ampères lov (10-iv), hvor af symmetri grunde $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\varphi(s) \mathbf{e}_\varphi$ og $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_z(s) \mathbf{e}_z$ som vist ovenfor, med Stokes' teorem (13a) for en cirkel ∂S i xy -planen med centrum på z -aksen og radius s . Vink: Cirkulationsintegralet af \mathbf{B} kan udføres eksplicit, og strømstyrken I (ladning pr. tid) kan skrives som et fladeintegral vinkelret på ledningen over strømtætheden \mathbf{J} (ladning pr. areal pr. tid).

6 Ladningsbevarelse og kontinuitetsligningen

I kontinuumsfysik benyttes benyttes Gauss' teorem sammen med fysikkens bevarelseslove til at udlede de styrende partielle differentialligninger for de relevante felter. Som et eksempel skal vi udlede den såkaldte kontinuitetsligning, som udtrykker ladningsbevarelse.

Opg. 9: Udledning af kontinuitetsligningen. Betragt et vilkårligt, men fastholdt delområde Ω i rummet med overfladen $\partial\Omega$. Elektrisk ladning kan frit krydse gennem overfladen, så den totale ladning $Q(t)$ i Ω afhænger derfor af tiden. Vi er interesseret i at studere raten $\partial_t Q(t)$ hvormed ladningen inde i Ω ændrer sig udtrykt ved ladningstætheden $\rho(\mathbf{r}, t)$ (ladning pr. volumen) og ved ladningsstrømtætheden $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ (ladning pr. areal pr. tid). Bevarelse af ladning betyder, at den samlede ladning i Ω kun kan ændre sig ved at ladning strømmer gennem overfladen $\partial\Omega$. Ladning kan altså ikke (i klassisk fysik) pludselig opstå i et punkt i rummet. Argumentér for, at ændringsraten $\partial_t Q$ af ladning dels kan udtrykkes som volumenintegralet $\partial_t Q = \mathcal{V}(\partial_t \rho, \Omega)$ og dels som fluxintegralet $\partial_t Q = \Phi(-\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}, \partial\Omega)$. Omskriv fluxintegralet til et volumenintegral ved hjælp af Gauss' teorem, og argumentér herefter for, at da den resulterende identitet mellem de to volumenintegraler er gyldig uanset valget af Ω , så må de to integrander være identiske, og kontinuitetsligningen er dermed vist,

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad \text{kontinuitetsligningen som udtrykker ladningsbevarelse.} \quad (17)$$

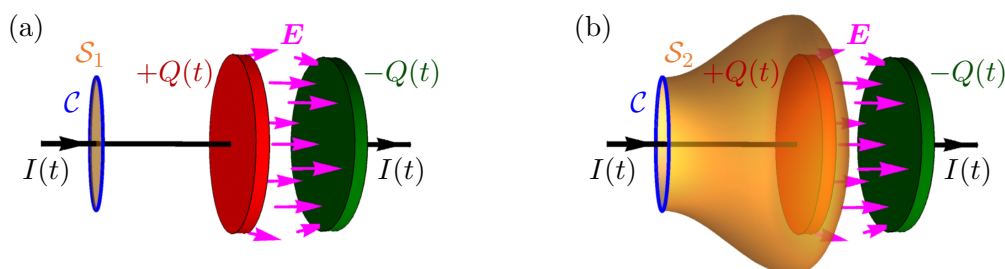
7 Fundamentale inkonsistenser i de præ-Maxwell'ske ligninger

Igennem ca. 10 år (1855-1865) studerede James Clerk Maxwell elektromagnetismens teoretiske grundlag. Han opdagede og korrigerede fundamentale inkonsistenser i de præ-Maxwell'ske ligninger og udviklede dermed den moderne elektromagnetiske teori, også kaldet den Maxwell'ske teori. Vi skal se på to sådanne inkonsistenser i Lign. (10).

Opg. 10: Mangel på ladningsbevarelse i Lign. (10). Kombinér Lign. (11d) og (13b) og vis, at der for et vilkårligt differentiabelt vektorfelt \mathbf{B} gælder $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$, og at Lign. (10-iv) derfor giver $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ for alle magnetfelter $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ i modstrid med ladningsbevarelse udtrykt ved kontinuitetsligningen (17).

Opg. 11: Elektrisk strøm eller ej ved opladning af en kapacitor? En kapacitor består af to metalplader, som er placeret nær hinanden, men uden elektrisk kontakt, se Fig. 4. En kapacitor kan oplades med elektrisk ladning ved at forbinde den med et batteri (helst i serie med en resistor), således at der løber en elektrisk strøm $I(t) = \Phi(\mathbf{J}, \mathcal{S})$ ind på den ene plade, som derfor får en voksende positiv ladning $Q(t)$, mens en tilsvarende elektrisk strøm løber væk fra den anden plade, som derfor får en negativ ladning $-Q(t)$. Kapacitoren har derfor altid en samlet ladning på nul, men der er et elektrisk felt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i og lidt udenfor gabet mellem pladerne, som peger (stort set) i retningen fra den positive til

den negative plade. Benyt nu Stokes' teorem på Ampères lov (10-iv) med de to forskellige flader vist på Fig. 4: \mathcal{S}_1 (en plan cirkelflade) og \mathcal{S}_2 (en krum pæreformet flade), der har cirklen $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}_1 = \partial\mathcal{S}_2$ som fælles rand. Vis, at med \mathcal{S}_1 får vi som forventet en strøm $I(t) \neq 0$, mens \mathcal{S}_2 meget overraskende giver det oplagt forkerte svar $I(t) = 0$.



Figur 4: Opladning af en kapacitor med en tidsafhængig elektrisk strøm $I(t)$ (sort ledning). Kapacitorens ene metalplade (rød) har en tidsafhængig positiv ladning $+Q(t)$, mens den anden (grøn) har en tilsvarende negativ ladning $-Q(t)$. Systemet analyseres med et cirkulationsintegral af $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ langs cirklen \mathcal{C} (blå) centreret på ledningen i et plan vinkelret på denne. \mathcal{C} er rand for både den plane cirkulære flade \mathcal{S}_1 (a) og for den krumme pæreformede flade \mathcal{S}_2 (b). $I(t)$ skærer igennem \mathcal{S}_1 men ikke \mathcal{S}_2 , som i stedet omslutter både ledning og den positive kapacitorplade. Der er et elektrisk felt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (magenta) i kapacitorens gab og nær dets rand, mens $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ er nul alle andre steder i systemet.

8 Maxwells ligninger

I årene 1861-65 publicerede James Clerk Maxwell fem artikler, hvori han udviklede den fulde klassiske elektromagnetiske teori, som (med Oliver Heaviside's elegante vektorformulering fra 1884) i kun fire ligninger sammenfatter alle elektromagnetiske fænomener, dog undtaget de atomare processer for absorption og emission af elektromagnetisk stråling, med $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ og $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$,

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & (\text{Gauss' lov}). & \quad (ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \quad (\text{ingen monopoler}). \\
 (iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & (\text{Faraday's lov}). & \quad (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}, & \quad (\text{Ampère-Maxwell's lov}).
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Denne endelige formulering af den elektromagnetiske teori adskiller sig fra den præ-Maxwell'ske teori (10) ved forekomsten af den såkaldte Maxwell'ske forskydningsstrømtæthed $\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$, som ganget med konstanten μ_0 er blevet lagt til højresiden i Ampère-Maxwells lov (18-iv). Vi skal nu eftervise, at de to eksempler på fundamentale inkonsistenser studeret i Opg. 10 og 11 er blevet repareret.

Opg. 12: Ladningsbevarelse i Maxwell's ligninger. Gentag betragtningerne i Opg. 10, men nu hvor \mathbf{J} erstattes med $\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$. Vink: Der optræder et nyt led $\nabla \cdot (\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$, som kan reduceres ved brug af Gauss' lov (18-i), hvorved kontinuitetsligningen (17) fremkommer. Ladningsbevarelse er således indeholdt implicit i Maxwells ligninger.

Opg. 13: Maxwell's analyse af kapacitoropladningen. Gentag betragtningerne i Opg. 11, men nu hvor \mathbf{J} erstattes med $\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$. Vink: Argumentér for, at det nye fluxled $\Phi(\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}, \mathcal{S}_2)$ er identisk med $\Phi(\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}, \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)$, som derefter kan udtrykkes ved den samlede ladning indsluttet af den lukkede flade $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ svarende til betragtningerne i Opg. 9.

Udover skabelsen af en konsistent og altomfattende teori for elektromagnetisme, så forudsagde Maxwell allerede i 1862 eksistensen af elektromagnetiske bølger ved alle frekvenser, og at lys faktisk er sådanne elektromagnetiske bølger i et begrænset område af det elektromagnetiske spektrum. Han kunne ovenikøbet beregne de elektromagnetiske bølgers udbredelseshastighed c og fandt en værdi som passede med den målte lyshastighed (Fizeau 1849, Foucault 1862). Jean le Rond d'Alembert viste

allerede i 1747, at hvis et felt $f(\mathbf{r}, t)$ udbreder sig som en bølge med bølgehastigheden c , så opfylder feltet den såkaldte bølgeligning $\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 f(\mathbf{r}, t)$. Tjek selv, at f.eks. den plane bølge $f(x, t) = f_0 \cos(kx - \omega t)$ opfylder bølgeligningen med bølgehastigheden $c = \omega/k$. Elektromagnetiske bølger blev observeret første gang i 1888 af Heinrich Hertz, i form af radiobølger med frekvensen 50 MHz og bølgelængden 6 m, 26 år efter Maxwell forudsagde deres eksistens og 9 år efter hans død.

Opg. 14: Maxwell's ligninger (18) medfører eksistensen af elektromagnetisk bølger i vakuum. Der er ingen ladninger i vakuum, så dér er $\rho = 0$ og $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Vis at det elektriske felt opfylder bølgeligningen $\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{E}$ ved at tage rotationen ($\nabla \times$) på begge sider af Faraday's lov (18-iii) og derefter indsætte Ampère–Maxwells lov (18-iv). Vink: Vis først ved direkte beregning, at $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$. Vis på tilsvarende måde, at magnetfeltet \mathbf{B} opfylder samme bølgeligning som \mathbf{E} , og bestem fra de to bølgeligninger et udtryk for den elektromagnetiske bølges udbredelseshastighed c i vakuum i termer af de elektromagnetiske konstanter, som optræder i Maxwell's teori. Beregn værdien af dette c og sammenlign med tabelværdien for lysets hastighed.