Danmarks Tekniske Universitet

Written exam, August 22, 2024
Course name: Mathematics 1b
Course number: 01002
Aids: All aids allowed by DTU (without internet)
Duration: 4 hours
Weights: Ex. 1: 25%, Ex. 2: 25%, Ex. 3: 25%, Ex. 4: 25%.

In order to obtain full credit, you are required to provide complete arguments. The answers can be given in English or Danish. All references (terminology, definitions, etc.) are to the lecture notes. A Danish version of the exam set follows *after* the English version.

Exercise 1. Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given by

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy^2.$$

(a) Plot the level set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 2\}$. A straight line is part of this level set. Describe the straight line (either by stating the equation of the line or by a parametrization of the line).

(b) Compute the gradient $\nabla f(x, y)$ for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Compute the Hessian matrix $\boldsymbol{H}_f(x, y)$ for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Show that $(0, 0)$ is a stationary point of f. Determine using the Hessian matrix $\boldsymbol{H}_f(0, 0)$ whether it is a local minimum, a local maximum or a saddle point.

(e) Find all stationary points of f. Determine using the Hessian matrix whether, for each stationary point, it is a local minimum, a local maximum or a saddle point.

The set of problems CONTINUES.

Exercise 2. Let $\boldsymbol{y} = [1, 2, 2, 4]^T$ be a (column) vector in $\mathbb{R}^4$ equipped with the standard inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Define $Y = \operatorname{span}\{\boldsymbol{y}\}$. Define the matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ by

$$A = \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T.$$

(a) Show that A is symmetric.

(b) Argue that the columns of A are scalar multiple of each other and that the rank of A is one.

(c) Give an example of a non-zero vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ that satisfies $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Recall that $\boldsymbol{y}$ is defined above.

(d) Let $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ be any vector that satisfies $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Show that $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

It can be shown that $Y^\perp = \ker A$, where $Y^\perp$ is the orthogonal complement of Y and $\ker A$ is the kernel (also called null space) of the matrix A. You may use this fact without proof.

(e) Argue that $\dim(Y^\perp) = 3$.

(f) Find an orthonormal basis for $Y^\perp$.

Exercise 3. Let the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

(a) Plot the graph of the function f. State the function value $f(k\pi)$ for each integer $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Find the degree-two Taylor polynomial $P_2(x)$ of $\sin(x)$ at $x_0 = 0$.

(c) Show that

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Hint: Use (b) and Taylor's limit formula.

(d) Argue that f is continuous.

Let the function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ c & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

where $c \in \mathbb{R}$.

(e) Specify a value of c that makes g continuous.

The set of problems CONTINUES.

Exercise 4. Consider the subset $A \subset \mathbb{R}^2$ given by:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\}.$$

Define the function $f : A \to \mathbb{R}$ by

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2).$$

(a) Let $r > 0$. Show that $r^2 \ln(r^2) - r^2$ is an anti-derivative of $2\ln(r^2)r$, i.e., show that

$$\int 2\ln(r^2) r \, \mathrm{d}r = r^2 \ln(r^2) - r^2.$$

(b) Find all anti-derivatives of $2\ln(r^2)r$, where $r > 0$.

(c) Find a parametrization of A in polar coordinates. State the Jacobian matrix and determinant of the parametrization.

(d) Argue that f is Riemann integrable.

(e) Compute the integral $\int_A f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}(x_1, x_2)$.

The set of problems is completed.

Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig eksamen, 22. august 2024
Kursusnavn: Matematik 1b
Kursusnummer: 01002
Hjælpemidler: Alle hjælpemidler tilladt af DTU (uden internet)
Varighed: 4 timer
Vægtning: Opg. 1: 25%, Opg. 2: 25%, Opg. 3: 25%, Opg. 4: 25%.

For at opnå fuld point, skal der gives fuldstændige argumenter. Svarene kan gives på engelsk eller dansk. Alle referencer (terminologi, definitioner osv.) er til lærebogsnoterne.

Opgave 1. Betragt funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy^2.$$

(a) Plot niveaumængden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 2\}$. En ret linje er en del af denne niveaumængde. Beskriv den rette linje (enten ved at angive ligningen for linjen eller ved en parametrisering af linjen).

(b) Beregn gradienten $\nabla f(x, y)$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Beregn Hesse-matricen $\boldsymbol{H}_f(x, y)$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Vis, at $(0, 0)$ er et stationært punkt for f. Bestem ved hjælp af Hesse-matricen $\boldsymbol{H}_f(0, 0)$, om det er et lokalt minimum, et lokalt maksimum eller et saddelpunkt.

(e) Find alle stationære punkter for f. Bestem ved hjælp af Hesse-matricen, om hvert stationært punkt er et lokalt minimum, et lokalt maksimum eller et saddelpunkt.

Opgavesættet FORTSÆTTER.

Opgave 2. Lad $\boldsymbol{y} = [1,2,2,4]^T$ være en søjlevektor i $\mathbb{R}^4$ udstyret med det sædvanlige indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Lad $Y = \operatorname{span}\{\boldsymbol{y}\}$ være et underrum. Definér matricen $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ved

$$A = \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T.$$

(a) Vis, at A er symmetrisk.

(b) Argumentér for, at søjlerne i A er skalar-multipler af hinanden, og at rangen af A er lig med én.

(c) Giv et eksempel på en ikke-nul vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, der opfylder $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Bemærk at $\boldsymbol{y}$ er defineret ovenfor.

(d) Lad $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ være en hvilken som helst vektor, der opfylder $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. Vis, at $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Det kan vises, at $Y^\perp = \ker A$, hvor $Y^\perp$ er det ortogonale komplement af Y og $\ker A$ er kernen (også kaldet nulrummet) for matricen A. Du må gerne bruge dette faktum uden bevis.

(e) Argumentér for, at $\dim(Y^\perp) = 3$.

(f) Find en ortonormal basis for $Y^\perp$.

Opgave 3. Lad funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

(a) Plot grafen for funktionen f. Angiv funktionsværdien $f(k\pi)$ for hver heltal $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Find Taylor-polynomiet af grad to $P_2(x)$ for $\sin(x)$ med udviklingspunkt $x_0 = 0$.

(c) Vis, at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Hint: Brug (b) og Taylors grænseformel.

(d) Argumentér for, at f er kontinuert.

Lad funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ c & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

hvor $c \in \mathbb{R}$.

(e) Angiv en værdi af c, så funktionen g er kontinuert.

Opgavesættet FORTSÆTTER.

Opgave 4. Betragt delmængden $A \subset \mathbb{R}^2$ givet ved:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\}.$$

Lad funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2).$$

(a) Lad $r > 0$. Vis, at $r^2 \ln(r^2) - r^2$ er en stamfunktion for $2\ln(r^2)r$, dvs. vis at

$$\int 2\ln(r^2)r \, \mathrm{d}r = r^2 \ln(r^2) - r^2.$$

(b) Find alle stamfunktioner for $2\ln(r^2)r$, hvor $r > 0$.

(c) Find en parametrisering af A i polære koordinater. Angiv Jacobi-matricen og Jacobi-determinanten for parametriseringen.

(d) Argumentér for, at f er Riemann-integrabel.

(e) Udregn integralet $\int_A f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}(x_1, x_2)$.

Opgavesættet er afsluttet.