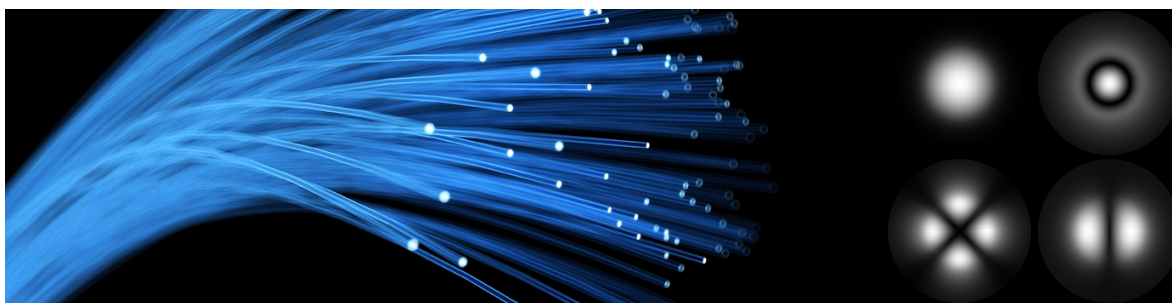


# OPTISKE BØLGELEDERE

Modes, ulineariteter og kvanteoptik

Køreplan

01002 Mat 1b - FORÅR 2024



## Baggrund

Siden de første demonstrationer af datatransmission gennem optiske fibre, har disse fibre udgjort ryggraden af den moderne kommunikationsinfrastruktur. I 2019 antog man, at den globale internettrafik udgjorde over 100 exabit per sekund ( $10^{18}$  bit/s). Denne trafik sendes gennem tusindvis af kilometre af optiske fibre. Udover deres imponerende evne til at transportere data har moderne optiske fibre - og andre former for bølgeledere - også mange andre anvendelser. Fibre udgør eksempelvis en central del af kritiske netværkskomponenter som forstærkere og kan bruges i sensorer, lasere og andet.

I denne projektopgave skal I kigge på, hvordan lys opfører sig, når det begrænses til den meget lille kerne (typisk under 10 mikrometer) i en optisk fiber. Efter en kort introduktion til elektromagnetisme i Del 1 skal I i Del 2 undersøge, hvordan denne begrænsning af lyset giver anledning til diskrete *modes*, i analog til de stående bølger, der opstår, når lyd er begrænset til en guitarstreng med fast længde. Disse modes har alle forskellige egenskaber, eksempelvis i form af deres rumlige fordeling af lyset i kernen og deres rejsehastighed igennem fiberen. Del 3 af opgaven omhandler frembringelse af enkelte fotoner i par. Disse fotonpar kan fx. bruges som led i en optisk kvantecomputer, og I skal blandt andet undersøge, hvordan fotonernes kvantemekaniske egenskaber afhænger af den optiske fibers egenskaber. Hvert fotonpar er dannet ved hjælp af en særlig ikke-lineær proces i bølgeledere, kaldet firebølgeblanding, der kan bruges til at skabe optiske felter ved andre bølglængder end det lys, man sender ind i fiberen.

## Del 1 - Grundlæggende elektromagnetisme

### Maxwells ligninger

Lys er elektromagnetiske bølger, og arbejdet med lys kræver derfor lidt kendskab til grundlæggende elektromagnetisme. Elektromagnetismen beskriver opførslen af henholdsvis det elektriske felt  $\mathbf{E}$  og det magnetiske felt  $\mathbf{B}$ . Disse to vektorfelter kan variere i både rum og tid og er beskrevet af et sæt af fire partielle differentialligninger, kaldet *Maxwells ligninger*, der (i situationer uden såkaldte eksterne ladninger eller strømme) tager formen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0 \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1d)$$

Her er  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ V s/(A m)}$  den såkaldte *vakuumpermeabilitet* og  $\epsilon$  er *permittiviteten*, der i vakuum har værdien  $\epsilon_0 = 8.82 \times 10^{-12} \text{ C/(m V)}$ , men har en anden værdi i andre materialer som eksempelvis glas. Desuden kan den variere i rum som  $\epsilon(x, y, z)$ . Har man at gøre med et materiale (altså ikke vakuum), skriver man typisk  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ , hvor  $\epsilon_r$  kaldes den relative permittivitet. Oftest beskrives materialer også gennem deres *brydningsindeks*,  $n$ , givet ved  $n^2 = \epsilon_r$ . En forskel mellem to materials brydningsindeks dikterer, hvordan lys afbøjes, når det møder overgangen mellem det ene materiale og det andet, og det er centralt for den måde, man leder lys på i en optisk fiber.

I rektangulære koordinater er  $\nabla$ -operatoren som bekendt

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2)$$

hvor hatte indikerer enhedsvektorer. Dette giver anledning til de kendte udtryk for gradienten og skalære felter samt divergensen og rotationen af vektorfelter.

**Opgave 1.** Vis, ved brug af vektoridentiteten  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , at disse ligninger kan kombineres til en partiel differentialligning udelukkende i det magnetiske felt  $\mathbf{B}$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

hvor  $\nabla^2$  her er *vektor Laplace operatoren*. *Hint: Start med ligningen for rotationen af  $\mathbf{B}$  og brug den oplyste vektoridentitet.*

Lign. (3) kaldes *bølgeligningen* og fremkommer utroligt mange steder i fysikken. I rektangulære koordinater tager vektorlaplaceoperatoren formen

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{x} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x + \hat{y} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_y + \hat{z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z \quad (4)$$

hvor  $A_x$ ,  $A_y$  og  $A_z$  er komponenterne af  $\mathbf{A}$ .

**Opgave 2.** Vis at alle dobbelt-differentiable vektorfunktioner af én variabel på formen  $\mathbf{A}(z - vt)$  er løsninger til bølgeligningen. Forklar hvorfor vi kalder dette en bølge der rejser i den positive  $z$ -retning, med hastigheden  $v$ . Find et udtryk for  $v$  ud fra de elektromagnetiske konstanter og udregn værdien i vakuum. Genkender I tallet?

I resten af opgaven begrænser vi os til *monokromatisk lys*, dvs. lys med en enkelt bølgelængde. Det magnetiske felt tager derfor formen  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \exp(-i\omega t)$ , hvor  $\mathbf{F}$  er en vektorfunktion der udelukkende afhænger af de rumlige koordinater og  $\omega$  er *vinkelfrekvensen*, der relaterer sig direkte til bølgelængden  $\lambda$  gennem  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , hvor  $c$  er lysets hastighed i vakuum.

**Opgave 3.** Vis, at denne ansatz leder til *Helmholtzligningen*

$$\nabla^2 \mathbf{F} + n^2 k^2 \mathbf{F} = 0, \quad (5)$$

hvor  $n = c/v$  er brydningsindekset. Bestem *vakuumbølgetallet*  $k$  ud fra de øvrige variable.

Når brydningsindekset,  $n$ , ikke ændrer sig for hurtigt mht. de rumlige koordinater, kan man til en god approksimation nøjes med at betragte en enkelt komponent af enten det elektriske eller magnetiske felt. Vi kalder denne komponent  $\Psi$ , som dermed opfylder den *skalære Helmholtzligning*

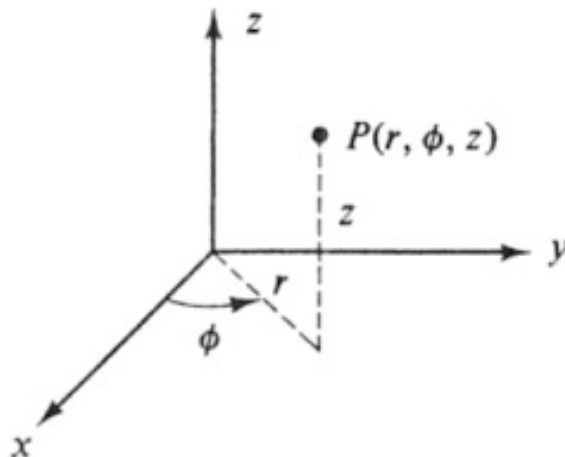
$$\nabla^2 \Psi + n^2 k^2 \Psi = 0, \quad (6)$$

sammen med et krav om at  $\Psi$  og dens førsteafledte skal være kontinuerte alle steder i rummet.

**Opgave 4.** Vis, at den skalære Laplace operator, der er defineret som divergensen af gradienten i rektangulære koordinater er givet ved

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Når I senere skal arbejde med feltet i en optisk fiber, kan man udnytte systemets symmetri bedre, hvis man arbejder i *cylindriske koordinater*, som illustreret på Fig. 1. De er relateret til de almindelige rektangulære koordinater  $x, y$  og  $z$  på følgende måde:



**Figur 1** – Sammenhængen mellem de almindelige rektangulære koordinater og de cylindriske koordinater.

$$x = r \cos \phi, \quad (8)$$

$$y = r \sin \phi, \quad (9)$$

$$z = z. \quad (10)$$

For at kunne løse Helmholtz-ligning i et cylindrisk koordinatsystem, må vi finde et udtryk for Laplace-operatoren i cylindriske koordinater.

**Opgave 5.** Brug kædereglene til at vise at

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial r}. \quad (12)$$

*Hint: Det kan være lettere at se ved at indsætte hjælpefunktionen  $f(\phi, r)$  i ligningen.*

**Opgave 6.** Brug resultatet i forrige opgave til at vise, at den skalære Laplace operator kan udtrykkes på følgende måde i cylindriske koordinater

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (13)$$

## Del 2 - Optiske bølgeledere

Som diskuteret i forrige del er det optiske felt,  $\Psi$ , i en bølgeleder tilnærmelsesvist beskrevet af den skalære Helmholtz ligning

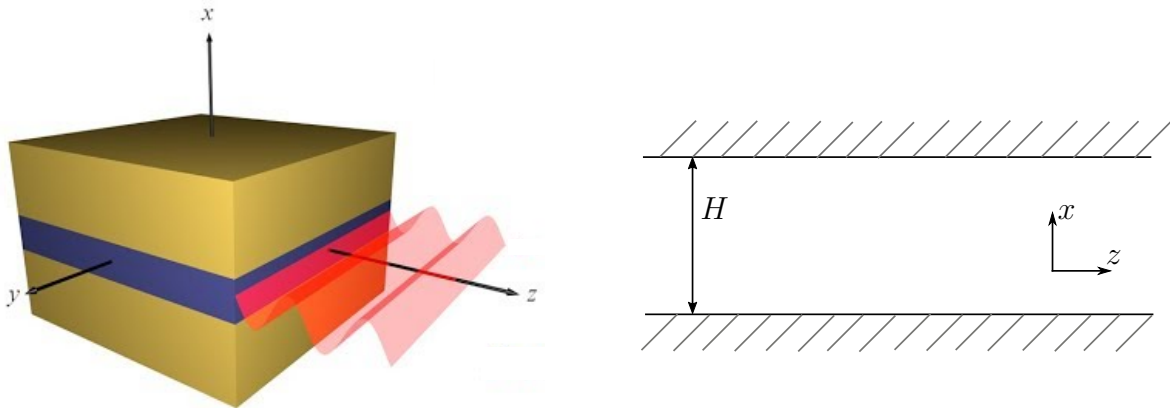
$$\nabla^2 \Psi + n^2 k^2 \Psi = 0, \quad (14)$$

hvor  $k$  er vakuumbølgetallet og  $n$  er brydningsindekset. Ved ændringer i brydningsindeks skal både  $\Psi$  og dens førsteafledte være kontinuerte over overgangen mellem to materialer med hvert sit brydningsindeks.

### Planbølgeleder

Vi betragter først en planbølgeleder, som vist på Fig. 2. Bølgelederen er uendeligt lang i  $y$ - og  $z$ -retningen, men består af et homogent materiale med højden  $H$  og brydningsindeks  $n$  imellem to perfekt ledende lag, hvilket betyder at  $\Psi = 0$  i disse lag.

Vi gætter på, at feltet i bølgelederen kan beskrives på formen  $\Psi(x, y, z) = X(x) \exp(i\beta z)$ , hvor  $\beta$  er den såkaldte *udbredelseskonstant*, som på nuværende tidspunkt er ukendt.



**Figur 2** – 3D figur og tværsnit af den planære bølgeleder som antages at være uendelig i udstrækning i  $y$  og  $z$ -retningerne.

**Opgave 7.** Forklar den fysiske betydning af udbredelseskonstanten  $\beta$ , idet  $\Psi$  eksempelvis repræsenterer en komponent af det elektriske felt.

**Opgave 8.** Vis at den ukendte funktion  $X(x)$  opfylder den ordinære differentiaalligning

$$X'' + (k^2 n^2 - \beta^2) X = 0, \quad (15)$$

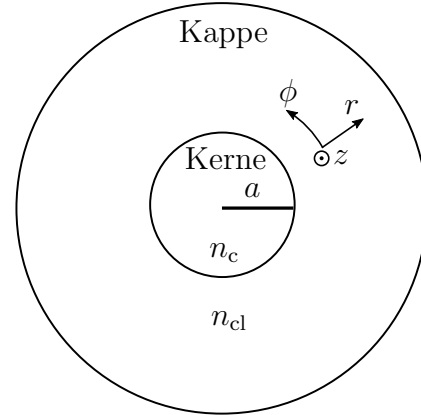
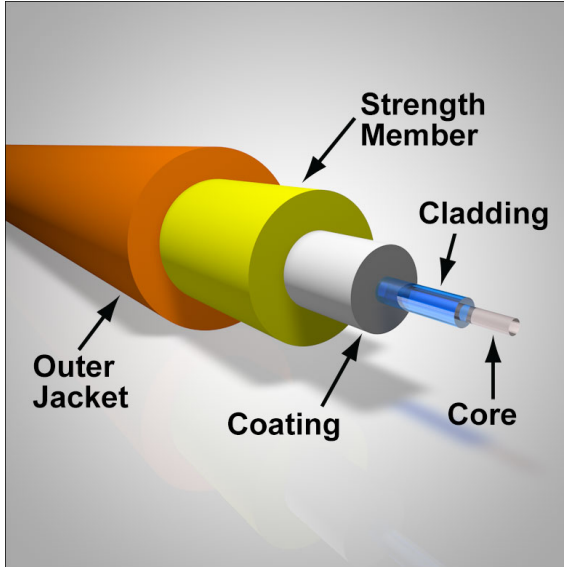
med tilhørende randbetingelse  $X(0) = X(H) = 0$ . Hvilken type problem er der her tale om?

**Opgave 9.** Bestem samtlige løsninger til problemet og vis at propagationskonstanten  $\beta$  kun kan antage diskrete værdier

$$\beta_m = \sqrt{k^2 n^2 - (m\pi/H)^2}, \quad (16)$$

hvor  $m$  er et heltal, som designerer *moden* der er tale om. Den første mode,  $m = 1$ , kaldes den *fundamentale mode*.

**Opgave 10.** Argumenter for at der for hver mode findes en største bølgelængde, som kan ledes igennem bølgelederen og bestem denne *cut-off* bølgelængde i vakuum som funktion af mode-indekset  $m$ . *Hint: En mode ledes i denne sammenhæng, hvis den propagerer i bølgelederen uden tab i  $z$ -retningen.*



**Figur 3** – Venstre figur viser en typisk indpakning af en optisk fiber. Til højre er en skitse af den del af tværsnittet hvor det optiske felt findes.

## Den optiske fiber

Vi betragter nu den optiske fiber, som er vist på Fig. 3. Fiberen består af en cylindrisk kerne af glas med brydningsindekset  $n_c$  og radius  $a$  omkranset af et lag af glas (kaldet *kappen*) med et lavere brydningsindeks  $n_{cl}$ . Fordi det optiske felt altid er koncentreret omkring kernen, kan kappen til en god approksimation antages at være uendeligt stor, dvs. der kan ses bort fra, at kappen har en endelig radiel udstrækning. Vi leder efter løsninger, der kan separeres i de tre cylindriske koordinater på formen  $\Psi(r, \phi, z) = R(r) \cos(m\phi) \exp(i\beta z)$ . Der er en tilsvarende mængde af løsninger med  $\sin(m\phi)$  i stedet for  $\cos(m\phi)$ , men i denne opgave begrænser vi os til cosinus-løsningerne.

**Opgave 11.** Forklar hvorfor vi kan nøjes med at betragte værdier af  $m$  som er ikke-negative heltal.

**Opgave 12.** Vis at den radielle del af feltet,  $R(r)$ , opfylder de to differentiaalligninger

$$r^2 R_c''(r) + r R_c'(r) + (r^2 \kappa^2 - m^2) R_c(r) = 0, \quad r < a, \quad (17)$$

$$r^2 R_{cl}''(r) + r R_{cl}'(r) - (r^2 \sigma^2 + m^2) R_{cl}(r) = 0, \quad r > a, \quad (18)$$

og randbetingelserne  $R_c(a) = R_{cl}(a)$  samt  $R_c'(a) = R_{cl}'(a)$  hvor  $\kappa = \sqrt{k^2 n_c^2 - \beta^2}$  og  $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_{cl}^2}$ .

Differentialligningen  $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - m^2)y(x) = 0$  kaldes Bessels differentialligning og har såkaldte *Bessel-funktioner* af første slags,  $J_m(x)$  som løsninger. Den modificerede Bessel differentialligning  $x^2y''(x) + xy'(x) - (x^2 + m^2)y(x) = 0$  har Besselfunktioner af anden slags,  $K_m(x)$ , som løsninger. Besselfunktionerne har egenskaben

$$J'_m(x) = J_{m-1}(x) - mJ_m(x)/x, \quad (19)$$

$$K'_m(x) = -K_{m-1}(x) - mK_m(x)/x. \quad (20)$$

Besselfunktionerne kan kaldes med SymPy som henholdsvis `besselj(m, x)` og `besselk(m, x)`.

**Opgave 13.** Vis at udbredelseskonstanten  $\beta$  er bestemt af ligningen

$$\frac{uJ_{m-1}(u)}{J_m(u)} = -\frac{vK_{m-1}(v)}{K_m(v)}, \quad (21)$$

hvor  $u = \kappa a$  og  $v = \sigma a$ . De understøttede fibermodes kan derfor beskrives af to heltal:  $m$ , som indgår i ligningen, samt  $l$ , der nummererer løsninger til ligningen foroven i retning af voksende  $u$ .

De understøttede fibermodes kaldes  $LP_{ml}$  og den fundamentale mode er  $LP_{01}$ .

**Opgave 14.** Lav et plot af henholdsvis venstresiden af (21) som funktion af  $u$  og højresiden af (21) som funktion af  $v$  for  $m = 0, 1, 2$ .

**Opgave 15.** Vis at  $V^2 = u^2 + v^2$  ikke afhænger af  $\beta$  og bestem et udtryk for  $V$ .

Parameteren  $V$ , som udelukkende afhænger af systemparametrene, kaldes den normaliserede frekvens.

**Opgave 16.** Forklar hvorfor antallet af løsninger til ligning (21) udelukkende afhænger af værdien af  $V$ .

**Opgave 17.** Argumenter (eksempelvis ud fra figuren fra opgave 14) for, at i modsætning til planbølgelederen, kan den fundamentale mode, matematisk set, altid propagere i fiberen.



**Opgave 18.** Bestem den mindste bølgelængde, hvor kun den fundamentale mode kan propagere i fiberen. Under denne bølgelængde kaldes fiberen *single-mode* og næsten alle kommercielle optiske fibre er designet til dette regime.

I resten af denne del betragter vi en bestemt fiber med  $n_{cl} = 1.444$  og  $n_c = 1.450$  ved bølgelængden  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ , samt en kerneradius på  $a = 8.0 \mu\text{m}$ .

**Opgave 19.** Udregn den normaliserede frekvens og angiv hvilke modes kan ledes i denne fiber. Lav heat plots af absolutværdien af den transverse feltfordeling af disse modes. *Hint: Det kan være en fordel at plote de to sider af Lign. (21), begge som funktion af  $u$ . Benyt evt. Pythons `pcolormesh`-funktion fra `matplotlib`-pakken til at lave heat plots (`matplotlib` akse-objektet bør laves med indstillingen `projection = 'polar'`).*

For at kunne undersøge hvordan propagationskonstanten afhænger af lysets frekvens  $\omega$  må man medtage, at brydningsindekset i glas afhænger af frekvensen (eller tilsvarende bølgelængden). Brydningsindekset i kappen, der består af rent glas, kan tilnærmelsesvist beskrives ved en Sellmeier-ligning på formen

$$n_{cl}^2(\omega) = 1 + \frac{B_1}{1 - (\omega/\omega_1)^2} + \frac{B_2}{1 - (\omega/\omega_2)^2} + \frac{B_3}{1 - (\omega/\omega_3)^2} \quad (22)$$

hvor parametrene er givet i Tabel 1. Brydningsindekset i kernen, der typisk er blevet tilsat en smule germanium for at hæve brydningsindekset, kan antages at være givet ved  $n_c(\omega) = n_{cl}(\omega) + \Delta n$ , hvor indekskontrasten er  $\Delta n = 0.006$ .

$B_1$	$B_2$	$B_3$	$\omega_1 (10^{15} \text{s}^{-1})$	$\omega_2 (10^{15} \text{s}^{-1})$	$\omega_3 (10^{15} \text{s}^{-1})$
0.696166300	0.407942600	0.897479400	27.55609797	16.21587137	0.1904734162

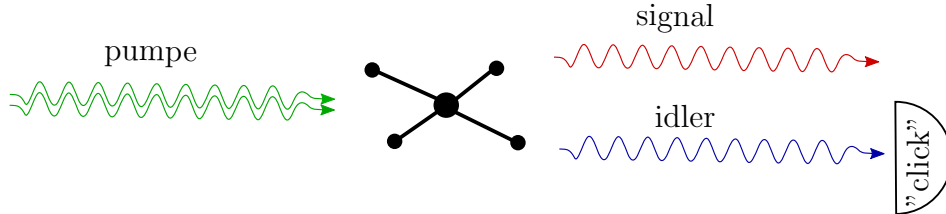
**Tabel 1** – Konstanter i Sellmeier-ligningen.

**Opgave 20.** Brug Sellmeier-ligningen til at plote  $n_{\text{eff}}(\omega)$  fra 500 nm til 2000 nm, hvor  $n_{\text{eff}} = \beta(\omega)/k$  er det såkaldte *effektive indeks*, som altid ligger mellem  $n_{cl}$  og  $n_c$ . Gør dette for de fire modes  $\text{LP}_{01}$ ,  $\text{LP}_{11}$ ,  $\text{LP}_{02}$  og  $\text{LP}_{21}$ .

### Del 3 - Kvanteoptik og fotonpæddannelse i optiske fibre

Denne del af opgaven handler om at danne par af fotoner i en optisk fiber. Når der er tale om enkelte fotoner, opfører de sig kvantemekanisk og har ikke-klassiske egenskaber

som sammenfiltrering (engelsk: entanglement). Fotonerne dannes gennem en ikke-lineær optisk process kaldet spontan firebølgeblandning. Processen drives af en optisk pumpe (dvs. en laserpuls), der er så svag, at der kun dannes et enkelt fotonpar som illustreret på Fig. 4. De to fotoner kaldes henholdsvis signal (s) og idler (i).



**Figur 4** – To pumpefotoner vekselvirker ikke-lineært med et glasmokyle og bliver til en signal- og idlerfoton, der hver har en frekvens/bølgelængde, som afviger fra pumpens. Her detekteres idleren for at vidne om signalfotonens tilstedeværelse, og den tilbageværende signalfoton kan herefter benyttes.

Fordi signal- og idlerfotonerne er kvantemekaniske partikler, er det nødvendigt at beskrive dem med en to-partikel bølgefunktion. Man kan vise, at bølgefunktionen, der beskriver frekvenserne af de to fotoner i en optisk fiber, har formen

$$\mathcal{A}(\Delta\omega_s, \Delta\omega_i) = \text{sinc} \left[ \frac{(\beta_{1s} - \beta_{1p})\Delta\omega_s + (\beta_{1i} - \beta_{1p})\Delta\omega_i}{2} L \right] \exp \left[ -\frac{(\Delta\omega_s + \Delta\omega_i)^2}{4\sigma_p^2} \right]. \quad (23)$$

Bølgefunktionen  $\mathcal{A}(\Delta\omega_s, \Delta\omega_i)$  kaldes ofte for *joint spectral amplitude*. I Lign. 23 angiver  $\Delta\omega_s$  afvigelsen fra en central signalfrekvens  $\omega_{s0}$ , og ligeledes angiver  $\Delta\omega_i$  for idleren en afvigelse fra en central idlerfrekvens.  $\sigma_p$  angiver pumpens spektrale bredde, og er givet ud fra pumpe-pulsens tidslige udstrækning. Ligesom bølgefunktioner i kvantemekanikken har JSA'en egenskaben, at  $|\mathcal{A}(\Delta\omega_s, \Delta\omega_i)|^2$  er en sandsynlighedstæthed for på en gang at finde signalfotonen med frekvensen  $\Delta\omega_s$  og idlerfotonen med frekvensen  $\Delta\omega_i$ . Herudover er  $\beta_{1s}$ ,  $\beta_{1i}$  og  $\beta_{1p}$  de førsteafledte af udbredelseskonstanten med hensyn til  $\omega$  ved henholdsvis de centrale signal-, idler- og pumpefrekvenser (fx  $\beta_{1s} = \beta'(\omega_{s0})$ ),  $\sigma_p$  er pumpens spektrale bredde (målt i  $\text{s}^{-1}$ ), og  $L$  er fiberlængden.

**Opgave 21.** Indfør nye variable  $\nu_s = \Delta\omega_s/\sigma_p$  og  $\nu_i = \Delta\omega_i/\sigma_p$  og vis at udtrykket kan omskrives til

$$\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i) = \text{sinc} \left( \frac{\alpha_s \nu_s + \alpha_i \nu_i}{2} \right) \exp \left[ -\frac{(\nu_s + \nu_i)^2}{4} \right], \quad (24)$$

med passende definitioner af de dimensionsløse konstanter  $\alpha_s$  og  $\alpha_i$ .

**Opgave 22.** Lav et 2D plot af absolutværdien af  $\mathcal{A}$  for  $\alpha_s = 1$  og  $\alpha_i = 0.5$ . *Hint: Brug evt. imshow eller pcolormesh fra matplotlib-pakken i Python.*

Som en approksimation kan sinc-funktion erstattes af en Gauss-lignende funktion

$$\text{sinc}(x) \approx \exp(-\gamma x^2). \quad (25)$$

**Opgave 23.** Bestem værdien af  $\gamma$  så de to funktioner på hhv. venstre og højre side af lighedstegnet i Lign. (25) har samme bredde, når de antager halvdelen af deres maksimale værdi.

Med denne værdi af  $\gamma$  kan JSA'en fra Lign. (24) nu approksimeres som:

$$\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i) \approx \exp\left[-\gamma \frac{(\alpha_s \nu_s + \alpha_i \nu_i)^2}{4}\right] \exp\left[-\frac{(\nu_s + \nu_i)^2}{4}\right], \quad (26)$$

**Opgave 24.** Lav et 2D plot af den approksimerede JSA med  $\alpha_s = 1$  og  $\alpha_i = 0.5$  og kommenter på gyldigheden af at approksimere sinc-funktionen med en eksponentialfunktion.

Som nævnt er absolutkvadratet af JSA'en,  $|\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i)|^2$ , en sandsynlighedstæthed. Den fortæller bl.a., at sandsynligheden,  $dS$ , for at finde signal- og idlerfotonparret ved normaliserede frekvenser i et (forsvindende) lille område omkring hhv.  $\nu_s$  og  $\nu_i$  er:

$$dS = \mathcal{N} |\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i)|^2 d\nu_s d\nu_i. \quad (27)$$

Konstanten  $\mathcal{N}$  er en såkaldt normaliseringskonstant, der er givet ved

$$\mathcal{N} = \left( \int \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i)|^2 d\nu_s d\nu_i \right)^{-1}. \quad (28)$$

**Opgave 25.** Baseret på approksimationen af JSA'en i Lign. (26) med  $\alpha_s = 1$  og  $\alpha_i = 0.5$  udregn da normaliseringskonstanten,  $\mathcal{N}$ . Udregn herefter:

1. Sandsynligheden for samtidig at detektere signalfotonen ved  $\nu_s \geq 0$  og idlerfotonen ved  $\nu_i \geq 0$ .
2. Sandsynligheden for  $\nu_s \leq 0$  og  $\nu_i \leq 0$ .
3. Sandsynligheden for det omvendte tilfælde, hvor  $\nu_s \geq 0$  og  $\nu_i \leq 0$ .
4. Sandsynligheden for  $\nu_s \leq 0$  og  $\nu_i \geq 0$ .

I næsten alle tilfælde er de to fotoner i fotonparret delvist sammenfiltrede (entangled), hvilket indebærer en *spektral korrelation*. Dvs. at hvis den ene foton detekteres ved en bestemt bølgelængde/frekvens, opnås information om fordelingen af den anden foton, som ikke var tilgængelig før målingen.

**Opgave 26.** Sammenhold resultaterne fra forrige opgave med 2D-plottet af den approksimerede JSA (med  $\alpha_s = 1$  og  $\alpha_i = 0.5$ ). Forklar hvorfor denne tilstand indeholder stærke spektrale korrelationer.

Korrelationen mellem de to fotoner kan kvantificeres ved den såkaldte *kvantemekaniske renhed* af den tilbageværende foton, efter den anden er blevet detekteret. Den kvantemekaniske renhed har den maksimale (og optimale) værdi på 1, når JSA'en kan *faktoriseres* dvs. skrives som et produkt af to funktioner, der hver afhænger af kun  $\nu_s$  eller  $\nu_i$ :  $\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i) = f(\nu_s)g(\nu_i)$ .

**Opgave 27.** Afgør om funktionen  $\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i) = (\nu_s \nu_i + 3\nu_s - 2\nu_i - 6) \exp(-\nu_s^2 - 2\nu_i^2)$  kan faktorerises som beskrevet ovenfor.

Vi skal nu undersøge, i hvilke tilfælde tilstanden i Lign. (23) har høj renhed.

**Opgave 28.** Baseret på approksimationen i Lign. (26), bestem alle værdier af  $\alpha_s$  og  $\alpha_i$  som gør  $\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i)$  faktoriserbar, dvs. at den kan skrives på formen  $\mathcal{A}(\nu_s, \nu_i) = f(\nu_s)g(\nu_i)$ , hvor  $f$  og  $g$  er to funktioner af en variabel.

Et centralt begreb i forbindelse med korrelerede kvantetilstande er *singular values*. Singular values for en (ikke-kvadratisk) matrix  $A$  er kvadratroden af alle ikke-negative egenværdier for matricen  $AA^T$ . Dette giver en række singular values  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

**Opgave 29.** Find, ved håndregning, alle singular values for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Singular values kan også findes ved brug af `numpy.linalg.svd()`-kommandoen i Python (husk at importere `numpy`-pakken). Når den ene af de to fotoner detekteres, vil den enkelte tilbageværende foton udgøre sin egen kvantemekaniske tilstand. Denne tilstands

kvantemekaniske renhed (engelsk: purity) kan udregnes ud fra de fundne singular values vha. formlen

$$P = \frac{\sum_n |\lambda_n|^4}{(\sum_n |\lambda_n|^2)^2}, \quad (30)$$

hvor  $|\cdot|$  angiver absolutværdien. Renheden, der bl.a. også er et mål for graden af spektral korrelation i fotonpartilstanden, ligger altid mellem 0 og 1, hvor 1 svarer til ingen spektral korrelation. Det vil sige, hvis der ikke er nogen spektral korrelation i fotonpartilstanden, så vil den enkelte foton, man har tilbage, når man detekterer den ene af de to fotoner, være i en såkaldt kvantemekanisk *ren* tilstand.

**Opgave 30.** Udregn renheden af matricen fra forrige opgave.

**Opgave 31.** Forklar ud fra udtrykket Lign. (30) hvorfor et ukorreleret fotonpar (dvs. høj renhed) kræver, at alle undtagen én singular value er nul.

#### Bemærk

Til de sidste opgaver herunder er kompleksiteten øget en smule, og det er nødvendigt at benytte metoderne fra flere af de tidligere opgaver for at komme bedst igennem dem. Det kan anbefales, at nogle af problemerne analyseres grafisk / numerisk frem for analytisk, og dertil er det en fordel at være ferm til at benytte numeriske metoder i Python. Tøv ikke med at spørge om hjælp, hvis I skulle sidde fast.

For at bestemme singular values for en kvantetilstand er det nødvendigt at repræsentere  $\mathcal{A}$  som en stor matrix - altså en diskretiseret udgave af den kontinuerte 2D-funktion. Udnyt i Python funktionen `lambdify((i, j), f(i, j))` fra Sympy-pakken sammen med Numpy-pakkens `meshgrid(-N..N, -N..N)` til at konstruere en matrix med elementerne  $e_{ji} = f(i, j)$ , hvor  $f(i, j)$  er en symbolsk funktion i Sympy.

*Hint: når man skal finde singular values for en matrix, er det vigtigt at sikre sig, at hele tilstanden er med i matricen.*

**Opgave 32.** Undersøg hvilke værdier af konstanterne  $\alpha_s$  og  $\alpha_i$  der giver højest renhed for JSA'en i Lign. (24) (uden approksimationen for sinc-funktionen). Hvilke værdier kræver dette for  $\beta_{1s} - \beta_{1p}$  og  $\beta_{1i} - \beta_{1p}$  for en fiber med længde  $L = 10$  m og en pumpepuls, der varer 1 ps og dermed har  $\sigma_p = 1 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$ ?

Det ønskes nu at lave en fotonpartilstand med en pumpe ved central-bølgelængden  $\lambda_p = 1064$  nm, et signal ved central-bølgelængden  $\lambda_s = 1550$  nm og en idler ved central-bølgelængden  $\lambda_i = 810$  nm. Ved at vælge den rette kombination af modes for pumpe,

signal og idler, er det muligt at optimere renheden af den tilbageværende foton, når den anden foton detekteres.

**Opgave 33.** Hvad er den højeste renhed, I kan få med fiberen fra slutningen af Del 2, hvis fiberlængden er  $L = 10$  m, og pumpens bredde er  $\sigma_p = 1 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$ ?

*Hint: Udregn udbredelseskonstantens førsteafledede,  $\beta_1$ , for de tre felter (pumpe, signal og idler) i forskellige mode-kombinationer og brug teknikkerne fra denne del af opgavesættet til at få en høj renhed.*

**Opgave 34.** Design en fiber, hvor renheden bliver højere end 80% for en fotonpartilstand med  $\lambda_p = 1064$  nm,  $\lambda_s = 1550$  nm og  $\lambda_i = 810$  nm. I kan frit vælge længden af fiberen,  $L$ , pumpepulsens tidslige længde,  $\sigma_p^{-1}$ , kerneradius,  $a$ , samt indekskontrast  $\Delta n$ . Plot den resulterende JSA.  
Udfordring: hvor høj en renhed, kan I opnå?