

Computertomografi – Matematik-1 projekt

Bjørn Jensen og Kim Knudsen

Spring 2024

Dette dokument er en beskrivelse af MAT-1 projektet om CT-skanninger. Der er meget MAT-1 stof i spil. Hver gruppe må (i samarbejde med vejleder) vælge, hvor fokus lægges. Man kan næppe nå at komme igennem alt.

Måske kunne det være en idé at starte med at se på Introduktionen på <http://ct-srp.compute.dtu.dk/>; det er materialet bag et SRP-oplæg om samme emne (på et lavere niveau).

God arbejdslyst!

Contents

1	Introduktion	2
2	Opvarmning: Talpuslespil	3
3	Matematisk modellering	5
3.1	Lamberts lov	5
3.2	Linjeintegraler	6
4	Matematisk analyse	8
4.1	Radon–transformationens egenskaber	9
4.2	Sinogram	9
4.3	Tilbageprojektion	10
4.4	Filtreret tilbageprojektion	11
5	Numerisk implementering og beregninger	12
5.1	Gitteret	13
5.2	Matrix-repræsentation af Radon–transformationen	13
5.3	Løsning af det lineære system	15
5.4	Datasæt-udfordring	16

1 Introduktion

Computed Axial Tomography (CAT) eller bare computertomografi, forkortet CT, er en kraftfuld billedbehandlingsteknik, der har både medicinsk og industriel anvendelse. Mens der er mange forskellige computerdrevne tomografiteknologier, refererer CT typisk (og også her) til røntgentomografi.

Den mest almindeligt kendte anvendelse af CT er inden for medicinsk billeddannelse, hvor man bruger den til hjernebilleddannelse, kræftdetektion, problemer i lungerne, hjertets anatomi og især komplekse knoglebrud. Selvfølgelig er denne liste ikke fuldstændig. Også i industrien anvendes CT på forskellige måder, for eksempel ved 3D rekonstruktion og fejldetektion i komponenter. En anden interessant anvendelse er til inspektion af undervandsrørledninger. I denne anvendelse sendes en robot til havbunden for at overvåge mulige revner eller svage steder i røret. Endelig anvendes CT til undersøgelse af materialer. Især korn-strukturer kan findes ved hjælp af højintensive CT-instrumenter, også kendt som synkrotroner. Faktisk er nogle nye store anlæg i øjeblikket ved at blive bygget i Lund (synkrotron MAXIV og neutronanlæg ESS) i tæt samarbejde med DTU. Anvendelserne er meget forskellige; det samme er instrumenterne og skalaen. Matematikken er dog overraskende ens, og det er det, vi vil fokusere på her.

Opgave 1. Diskuter kort den samfundsmæssige betydning af CT-skanninger, f.eks. ved medicinsk billeddannelse. (Brug f.eks. onlinekilder.)

Et CT-billede visualiserer en bestemt fysisk egenskab ved det afbildede objekt. Mere præcist visualiserer det røntgenabsorptionen, også kendt som dæmpningskoefficienten μ . Dette er en funktion i 3D, $\mu(x, y, z)$, der kan tage forskellige værdier fra region til region i kroppen afhængigt af det lokale væv, organer, knogler osv. Formålet med CT er at skabe billeder af denne funktion non-invasivt, det vil sige uden at tage patienten gennem en operation.

Figur 1 indeholder hjerne-CT-billeder taget ved forskellige ”vandrette” snit gennem patienten. På billederne i Figur 1 følger snittene planer vinkelret på fod- til-hoved-retningen. Hvert gråskalabillede fortolkes som et konturplot af funktionen $\mu(x, y, z_0)$ i planen $z = z_0$.

Nu ved vi, hvad vi ser på i Figur 1, men vi er ikke i stand til at komme direkte til disse billeder (snit). I stedet foretager vi røntgenmålinger udenfor patienten. Og målet er at finde den indvendige dæmpningskoefficient ud fra udvendige målinger ved at løse et inverst problem.

Den følgende projektbeskrivelse starter med en opvarmning på nummerpuslespil. Derefter falder det i tre dele: Først overvejer vi den matematiske modellering af røntgenstråler og dæmpning, dernæst fokuserer vi på den matematiske analyse af modellen, og til sidst overvejer vi numeriske beregninger, der åbner for dybere indsigt i større problemer.



Figure 1: 2d-snit af et menneskehoved fra en CT-scanning

2 Opvarmning: Talpuslespil

For at få en ide om det grundlæggende betragter vi talpuslespillet i Figur 2. Målet er at bestemme celleværdierne således, at række- og kolonnesumme er lig med henholdsvis $(5, 2)$ og $(3, 4)$. Fire lineære ligninger for fire ukendte variable kalder på matricer og lineær algebra.

Opgave 2. Opstil den tilsvarende matrixligning og løs puslespillet i Figur 2. Diskuter løsningens form ud fra søjle- og nulrummet for den tilhørende matrix.

Forhåbentlig kan du indse, at problemet har mange løsninger, men så kan vi benytte forudgående information:

Opgave 3. Antag, at vi ved, at celleværdierne er positive heltal. Find den entydige løsning på puslespillet i Figur 2.

Lignende gåder kan sættes op til større systemer, se 3×3 -problemet i Figur 3. Her har vi 6 ligninger for 9 ubekendte. Men så kan vi tilføje flere summer, for eksempel langs diagonalen, se Figur 4.

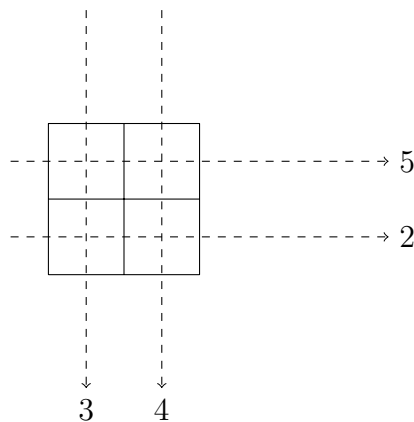


Figure 2: Et 2×2 gitterpuslespil

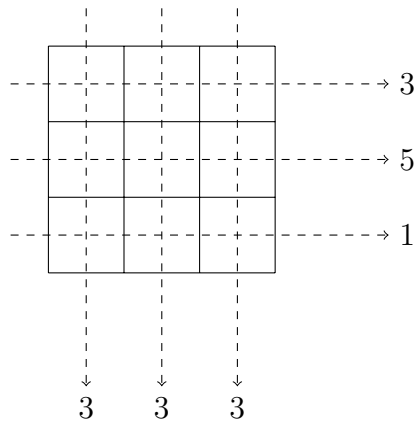


Figure 3: Et 3×3 gitterpuslespil

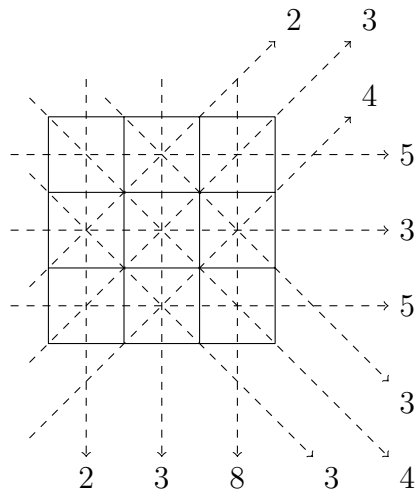


Figure 4: Et 3×3 gitterpuslespil med diagonal-summer.

Opgave 4. Løs puslespillet i Figur 3 og i Figur 4.

Dette lille puslespil rummer meget af det, vi vil arbejde med på de følgende sider. Gitteret repræsenterer et lille afgrænset domæne med en ukendt funktion (her er funktionen stykkevis konstant i hvert gitterkvadrat), og vi ønsker at finde denne funktion ved at kende summen af dens værdier langs nogle linjer. Forestil dig, at vi forfiner gitteret. Når vi gør det, vil vi naturligvis have brug for flere og forskellige linjer at summere over for at garantere, at vi kan finde en løsning, da antallet af ubekendte vil stige.

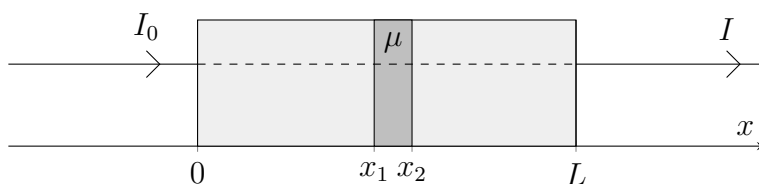


Figure 5: En stråle, der trænger ind i et objekt. I midten af objektet anses en plade for at have konstant dæmpningskoefficient μ .

3 Matematisk modellering

I de følgende afsnit vil vi se på fysikken bag dæmpning og udlede en matematisk model. Dette involverer differentialligninger og linjeintegraler af funktioner. Derefter definerer vi Radon-transformationen og studerer dens forskellige egenskaber.

3.1 Lamberts lov

Intensiteten af en stråle beskriver energien i strålen, som afhænger af mængden af fotoner, den bærer. Absorption af fotoner er et spørgsmål om sandsynlighed. Lad os sige, at en foton er absorberet i en plade af materiale M med sandsynlighed p , så stiger sandsynligheden for absorption, hvis vi arrangerer en række af multiple kopier af M . Givet n plader af M giver standard sandsynlighedsregning en absorptionssandsynlighed på $1 - (1 - p)^n$. Imidlertid indeholder en stråle nok fotoner til, at sandsynlighederne kan negligeres til fordel for middelværdien.

Forestil dig situationen afbildet i Figur 5. En røntgenstråle bevæger sig langs x -aksen med initial intensitet I_0 . For at modellere intensitetstab og især intensiteten $I(x)$ i et bestemt punkt x , ser vi på en tynd plade af materiale med tykkelse $\Delta x = x_2 - x_1$. Intensitetsændringen over pladen er da $\Delta I = I(x_2) - I(x_1)$. Denne ændring er proportional med indfaldsintensiteten, $I = I(x_1)$, og tykkelsen af pladen, dvs. $\Delta I \propto I \Delta x$. Proportionalitetskoefficienten er $-\mu$, hvor $\mu \geq 0$, dvs

$$\Delta I = -\mu I \Delta x. \tag{1}$$

Dette er Lamberts lov, opkaldt efter Johann Heinrich Lambert i 1760, selvom den faktisk blev opdaget tidligere af Pierre Bouguer, som fik den offentliggjort i 1729, hvorfra Lambert citerede den.

Opgave 5. Diskuter fortegnets betydning i koefficienten $-\mu$.

Opgave 6. Udled differentialligningen

$$I'(x) = -\mu(x)I(x), \quad I(0) = I_0. \tag{2}$$

Koefficienten μ er den ikke-negative absorptionskoefficient eller dæmpningskoefficient og i tilfælde af opløselige stoffer have, $\mu = \ln(10)\epsilon C$, hvor C er koncentrationen

af stoffet og ϵ kaldes den molære ekstinktionskoefficient. Dette forhold for opløselige stoffer er Beers lov efter August Beer i 1852. De to love omtales til tider sammen som Lambert–Beers lov (evt. i omvendt rækkefølge).

Ligesom Beers lov viser, kan μ afhænge af mange forskellige parametre. En kendt afhængighed, som vi ignorerer i dette projekt, er strålens frekvens. Røntgenstråler er en form for elektromagnetisk stråling, ligesom synligt lys, men varierer i bølgelængder fra 0,01 til 10 nanometer. Forskellige bølgelængder svarer til forskellige frekvenser ω , og materialet kan dæmpes forskelligt til disse, $\mu = \mu(\omega)$. Vi vil antage, at ω er konstant, hvilket kun er rigtigt i store synkrotronanlæg, men dette er en af mange forenklinger af den model, vi vil bruge.

Opgave 7. Lad os løse differentialligningen (2):

1. Bestem $I(x)$ afhængig af I_0 og $\mu(x)$. Du kan antage $\mu = 0$ for $x < 0$ og $x > L$.
2. Lad $I_1 = I(L)$ angive udgangsintensiteten. Vis, at

$$\ln \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = - \int_0^L \mu(x) dx.$$

Det skulle være klart, at alt handler om integraler langs strålebaner, og derfor bliver vi nødt til at gå mere i dybden med linjeintegraler.

3.2 Linjeintegraler

Grundlaget for CT-matematikken er Radon-transformationen, opkaldt efter den østrigske matematiker Johan Radon, som udviklede den matematiske teori i 1917. Radon-transformationerne tager en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ og afbilder den til en samling af linjeintegraler af samme funktion. Derfor er vores første opgave at beskrive en linje ℓ in \mathbb{R}^2 .

Opgave 8. Lad $\ell(\rho, \varphi)$ angive linjen i \mathbb{R}^2 med vinkel φ mod uret med y -aksen og afstand ρ fra origo (regnet med fortegn), som afbildet i Figur 6. Bemærk, at det betyder, at ρ kan være negativ.

- a) Tegn et koordinatsystem med en repræsentativ linje og marker parametrene ρ og φ på tegningen. Vinklen φ optræder flere steder, kan du identificere dem?
- b) Opskriv en ligning for linjen $\ell(\rho, \varphi)$.
- c) Giv en parameterisering $\mathbf{r}_\ell(t)$, af $\ell(\rho, \varphi)$.

Med dette på plads vælger vi en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ og angiver med $p_\varphi(\rho)$ linjeintegralet af f langs $\ell(\rho, \varphi)$, dvs.

$$p_\varphi(\rho) = \int_{\ell(\rho, \varphi)} f(x, y) ds. \tag{3}$$

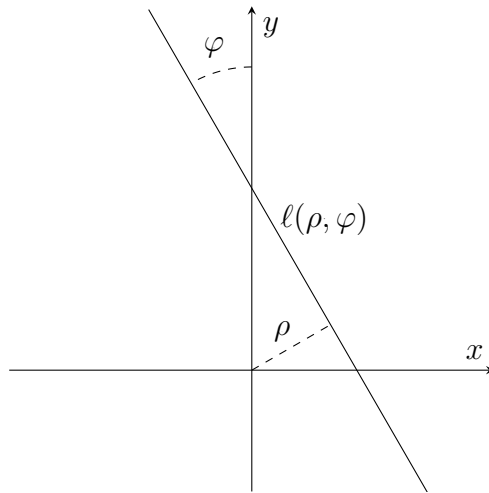


Figure 6: Linjen $\ell(\rho, \varphi)$.

Opgave 9. Brug din parametrisering fra Opgave 8 til at skrive integralet op for $p_\varphi(\rho)$.

Før vi går videre, lad os definere en funktion der er praktisk at arbejde med. Rektangel-funktionen er defineret som,

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}.$$

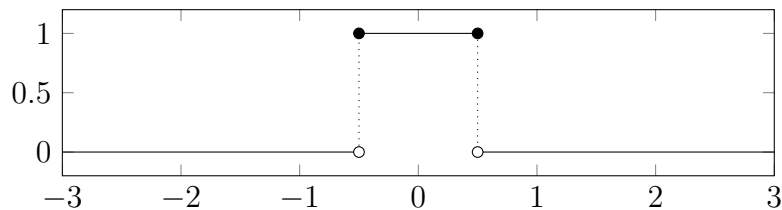


Figure 7: Plot af $\text{rect}(t)$

Opgave 10. Bekræft selv, at $f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)$ definerer enhedsskiven. Bestem linjeintegralerne $p_\varphi(\rho)$. (*Tip: brug enhedsskivens symmetri.*)

Opgave 11. Lad $f(x, y) = \text{rect}(x) \text{rect}(y)$ og udregn linjeintegralerne $p_{\pi/3}(\rho)$.

Selvom det ikke var specifikt nævnt, har vi faktisk beregnet Radon-transformationen af funktionen f ved at løse ovenstående Opgave 10. Lad os definere det mere præcist.

4 Matematisk analyse

Som det første defineres støtten af en funktion:

Definition 1. Støtten af en funktion $f(x, y)$ er den mindste lukkede mængde, $K = \text{supp}(f) \subset \mathbb{R}^n$, således at $f(x, y) = 0$ for $(x, y) \in \mathbb{R}^n \setminus K$. En funktion f siges at have kompakt støtte, hvis $\text{supp } K$ er en begrænset mængde.

Lad os derefter definere et passende vektorrum.

Definition 2. Lad $C_C(\mathbb{R}^2)$ være mængden af kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, der har kompakt støtte.

Funktionen

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right), & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

er et eksempel på en funktion i $C_C(\mathbb{R}^2)$.

Opgave 12. Tjek, at $f_1 \in C_C(\mathbb{R}^2)$ og angiv $\text{supp}(f_1)$. Giv et andet eksempel på en funktion i $C_C(\mathbb{R}^2)$.

Opgave 13. Vis, at $C_C(\mathbb{R}^2)$ er vektorrum.

Hvad er dimensionen af $C_C(\mathbb{R}^2)$? (*Tip: hvor mange lineært uafhængige elementer kan du finde?*)

Det er ofte nyttigt at gå fra funktionen $f(x)$ og linjeintegralerne $p_\varphi(\rho)$ til afbildningen, eller operatoren, der forbinder enhver f til dens p :

Definition 3 (Radon–transformation). Radon–transformationen er operatoren $R : C_C(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_C(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, $Rf(\rho, \varphi) = p_\varphi(\rho)$, defineret ved

$$Rf(\rho, \varphi) = \int_{\ell(\rho, \varphi)} f(x, y) \, ds.$$

Bemærk, at p er defineret i området $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. \mathbb{T} er cirklen, som bekvemt definerer retningen/vinklen φ . Du kan tænke på \mathbb{T} som intervallet $[0, 2\pi)$, men sløjfet, så hvis du bevæger dig ud af intervallet i den ene ende, kommer du straks tilbage igen i den anden ende; svarende til en cirkel.

Opgave 14. Vis, at hvis f har kompakt støtte, så har Radon–transformationen $r = Rf$ også kompakt støtte i ρ , altså vis at der findes et $\rho' > 0$, således at $r(\rho, \varphi) = 0$ for alle $\rho > \rho'$.

Opgave 15. Relater ovenstående definition af Radon-transformationen til Lamberts lov udledt i Opgave 7.

4.1 Radon–transformationens egenskaber

En bemærkelsesværdig egenskab ved Radon-transformationen er, at den er invertibel. Det vil sige, at $r(\rho, \varphi)$ faktisk indeholder al den information, der kræves for at rekonstruere $f(x, y)$. Så hvis vi kender r ud fra målinger, kan vi også bestemme f . Det vender vi tilbage til senere. Nu ser vi på nogle andre egenskaber.

Opgave 16 (Linearitet). Vis, at Radon-transformationen er en lineær operator.

Opgave 17 (Translationsegenskab). Vis, at hvis $r = Rf$ og $\tilde{f}(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$ er et forskudt f , så er $R\tilde{f} = \tilde{r}$, hvor $\tilde{r}(\rho, \varphi) = r(\rho - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, \varphi)$. (*Tip: brug dit resultat fra Opgave 9.*)

Opgave 18 (Rotationsegenskab). Vis, at hvis $r = Rf$ og f_θ er f drejet om origo med vinkel θ , så er $Rf_\theta = r_\theta$, hvor $r_\theta = r(\rho, \varphi - \theta)$. (*Tip: i) skriv f_θ som $f \circ M_\theta$ hvor M_θ er en rotationsmatrix ii) brug dit resultat fra Opgave 9. iii) brug de trigonometriske vinkelsum-identiteter*)

Opgave 19 (Skaleringsegenskab). Lad $\alpha > 0$. Vis, at hvis $r = Rf$ og $f_\alpha(x, y) = f(\alpha x, \alpha y)$, så er $Rf_\alpha = r_\alpha$, hvor $r_\alpha(\rho, \varphi) = \frac{1}{\alpha}r(\alpha\rho, \varphi)$.

4.2 Sinogram

Målingerne i en CT-skanning, $r(\rho, \varphi)$, kan undersøges på forskellige måder. Typisk laver vi et konturplot, det såkaldte sinogram. Det er et 2D-plot i (ρ, φ) koordinatsystemet. Se Figur 8 for et beregningseksempel på et billede og tilsvarende sinogram. Bemærk de oscillerende sinus/cosinusmønstre i sinogrammet.

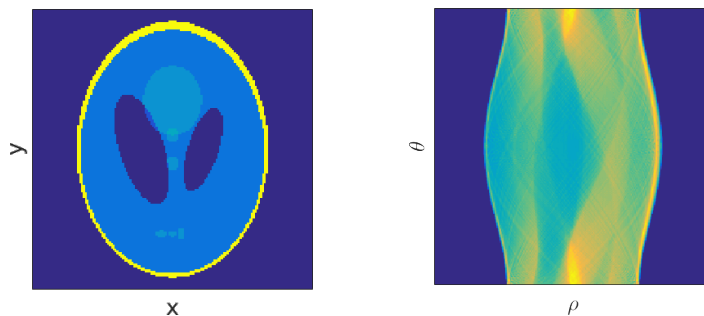


Figure 8: Shepp-Logan fantom og tilsvarende sinogram.

Vi er særligt interesserede i at forstå bidraget til $r(\rho, \varphi)$ fra funktionsværdier i et enkelt punkt (x', y') . Vi kalder dette punktets signatur. Se også Figur 9.

Opgave 20. Identificer, hvordan punkterne og kurverne stemmer overens.

Formålet med den følgende øvelse er at forstå terminologien *sinogram*.

Opgave 21 (Sinogram). Lad os betragte et punkt (x', y') .

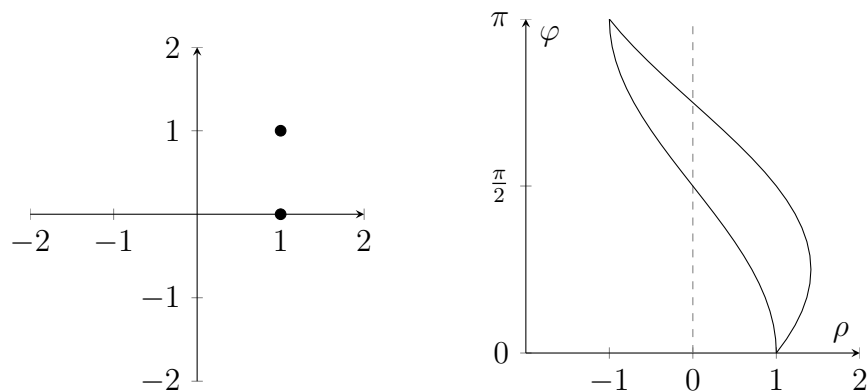


Figure 9: Til venstre ser vi to punkter, og til højre ser vi de tilsvarende Radon-transformationer (en linjeintegral gennem et af de to punkter evalueres til 1).

1. Find en ligning i (ρ, φ) -planen for kurven, der beskriver alle linjer, der passerer gennem punktet (x', y') .
2. Fortolk kurven som en sinus/cosinus funktion.
3. Definer en "funktion" f , der er uendelig i punktet $((x', y')$ og nul alle andre steder; men med den bemærkelsesværdige egenskab, at integralet af f langs en hvilken som helst linje, der går igennem (x', y') , er identisk 1. (Dette kaldes Dirac delta-funktionen.)

Hvordan forventer du, at sinogrammet $r(\rho, \varphi)$ ser ud?

Opgave 22. Bemærk, at vi i Figur 9 kun plotter φ i området $(0, \pi)$. Overvej geometrien og hvordan r ser ud i området $(\pi, 2\pi)$, og hvorfor det illustrerede område er nok.

Opgave 23. I Figur 9 er punkterne placeret ved punkterne $(1, 0)$ og $(1, 1)$. Bestem parameteriseringer for de viste kurver.

4.3 Tilbageprojektion

Nu hvor vi kan lave Radon-transformationer, vil vi selvfølgelig også gerne kunne vende tilbage til den oprindelige funktion. Det vil sige, at vi ønsker en omvendt radontransformation. Vi har allerede berørt eksistensen af den omvendte transformation, men det er ikke indlysende, hvordan man gør det.

Ser man på en funktions geometri og profilkurver, kan en intuition være at "smøre" profilkurverne tilbage på tværs af domænet langs deres tilsvarende stråleretninger. Dette kaldes almindeligvis tilbageprojektion. Det vil sige, i hvert punkt (x, y) er tilbageprojektionens middelværdien af alle linjeintegraler, der går gennem punktet. Selvom det ikke er et sandt omvendt billede, producerer det stadig noget, der ligner det originale billede, selvom det er sløret. Faktisk kan vi bestemme præcist, hvad der går galt.

Definition 4. Lad $r = Rf$ være Radon-transformationen af f og f_b tilbageprojektionen, så er

$$f_b(x, y) = \int_0^\pi r(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi.$$

For at se, hvad tilbageprojektionen faktisk gør, har vi først brug for følgende resultat.

Opgave 24. Vis, at hvis $g(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$ så er $g_b(x, y) = f_b(x - x_0, y - y_0)$.

Dette resultat fortæller os, at tilbageprojektionen fungerer på samme måde overalt, hvilket betyder, at det er nok at undersøge dens virkning på et enkelt punkt, fx i $(0, 0)$.

Opgave 25. Vis, at

$$f_b(0, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} f(-x, -y) dx dy,$$

dvs f_b er 2D foldningen af $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ med f , $f_b(x, y) = (h * f)(x, y)$. (*Tip: brug definitionen af f_b og Radon-transformation og lav en koordinattransformation.*)

Så vi kan se her, at tilbageprojektionen producerer det korrekte f , men med en slørende operator påsat. Det er derfor, det umiddelbart ser rigtigt ud, men mister skarpheden, den originale f kunne have haft.

4.4 Filtreret tilbageprojektion

Ved at filtrere tilbageprojektionen kan vi fjerne udtværingseffekten. Dette beskrives bedst ved hjælp af Fourier-transformationen; dette er et emne, der undervises i dybden i senere matematikkurser, og vi vil kun røre overfladen her.

Definition 5 (1D Fourier transformation). Lad $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, så er Fourier-transformationen af g , betegnet \widehat{g} , givet ved

$$\widehat{g}(\xi) = (\mathcal{F}g)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt. \quad (4)$$

Den inverse Fourier-transformation er defineret ved

$$(\mathcal{F}^{-1}\widehat{g})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi t} d\xi. \quad (5)$$

Som notationen allerede indikerer, kan man vise at

$$g(t) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{g})(t).$$

Fourier-transformationen af g er meget brugt i matematik og signalbehandling; den fanger *frekvensindholdet* af funktionen g .

Opgave 26. Opskriv definitionen af Fourier–transformen ved at bruge sin og cos i stedet for den komplekse eksponentialfunktion.

Et filter i signalbehandling er ofte defineret ved en filterfunktion $\psi(\xi)$ gennem multiplikation i Fourier–domænet:

Definition 6 (Filter). Filtreringen af funktionen f ved filter ψ er defineret ved

$$g_\psi(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\xi)\psi(\xi))$$

Den specielle filterfunktion $\psi(\xi) = |\xi|$ kaldes Ramp-filteret. Det er vigtigt for det følgende resultat, kaldet formelen for filtreret tilbageprojektion. Antag, at funktionen f har Radon-transformationen $Rf = r(\rho, \varphi)$. Så finder vi inversionen ved først at filtrere og derefter benytte tilbageprojektion.

$$\begin{aligned} h(\rho, \varphi) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{r}_\varphi(\xi)\psi(\xi)), && \text{(filtrering)} \\ f(x, y) &= h_b(x, y). && \text{(tilbageprojektion)} \end{aligned}$$

Opgave 27. Skriv en komplet formel (med integraler), der giver $f(x)$ fra dens Radon-transformation $r(\rho, \varphi)$.

Opgave 28. Implementer formelen i Python og eksperimenter med forskellige funktioner $f(x)$; eksperimenter også med andre filterfunktioner $\psi(\xi)$, forskellige fra Ramp-filteret.

5 Numerisk implementering og beregninger

I det tidligere afsnit talte vi om Radon-transformationen og integral–repræsentationer. Integration er en lineær operation, som i en diskretiseret model betyder, at den blot kan repræsenteres ved matrix–multiplikation. Men hvordan gør man dette? Lad os genoverveje talpuslespillet i figur 4. Antag, at 3×3 -gitteret repræsenterer en funktion, der er konstant i hver celle (og nul udenfor). Antag, at cellerne har dimension 1×1 (du bestemmer enhederne). Skriv linjeintegralet ned langs diagonalen (indfør ukendte variable x_1, x_5, x_9).

Opgave 29. Modifier diagonal–summerne i Figur 4 for at tage højde for længden af diagonalen inde i hver celle med længde $\sqrt{2}$. Løs det resulterende system af lineære ligninger.

Der vil være adskillige måder, hvorpå man kan nærme sig diskretisering af teorien. Et fællestræk vil være, at vi skal flytte til et endeligt–dimensionelt vektorrum. Dette kan gøres på flere forskellige måder.

5.1 Gitteret

Vi vil antage, at vores funktion kan tilnærmes ved noget stykkevis konstant på et kvadratisk gitter. Dette er fuldstændig analogt med puslespillet i Figur 4, vi løste tidligt. Vi vil dog tillade mere frihed med linjerne gennem gitteret og yderligere vægtning af bidraget fra hver gittercelle med den afstand, linjen tager gennem den bestemte celle. Til dette formål skal vi fastsætte noget notation.

Opgave 30. Lad $a > 0$ og definer kassen $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in (-a, a]\}$.

a) Illustrer mængden B .

b) Lad $N \in \mathbb{N}$ og skab et ensartet gitter på B der opdeler det i N^2 lige store celler, C_{ij} ; bestem mængden C_{ij} . (*Bemærk: C_{ij} bør konstrueres med halvlukkede intervaller, $(\cdot, \cdot]$, ligesom B .*)

Vi vil arbejde med funktioner, som er konstante på hver celle C_{ij} . Lad $\chi_{C_{ij}}$ være indikatorfunktionen på C_{ij} , dvs.

$$\chi_{C_{ij}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } (x, y) \in C_{ij}, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

så er $V = \text{span}_{ij}\{\chi_{C_{ij}}\}$ vores endeligt-dimensionelle vektorrum, og en funktion $f \in V$ kan ses som en endeligt-dimensionel vektor

$$\mathbf{x} = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1N}, f_{21}, f_{22}, \dots, f_{NN}) \in \mathbb{R}^{N^2} \quad (6)$$

eller som en funktion, hvor vektorkomponenterne er koefficienterne

$$f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} f_{ij} \chi_{C_{ij}}(x). \quad (7)$$

5.2 Matrix-repræsentation af Radon-transformationen

Nu hvor vi har opdelt vores funktion og til gengæld repræsenteret den blot ved en vektor, kan Radon-transformationen, som vi husker som en lineær operator, blive repræsenteret af en matrix \mathbf{A} . I dette afsnit vil vi finde ud af, hvordan man bestemmer denne matrix.

Når vi ser tilbage på puslespillet i Figur 4, var matricen til at løse dette problem

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

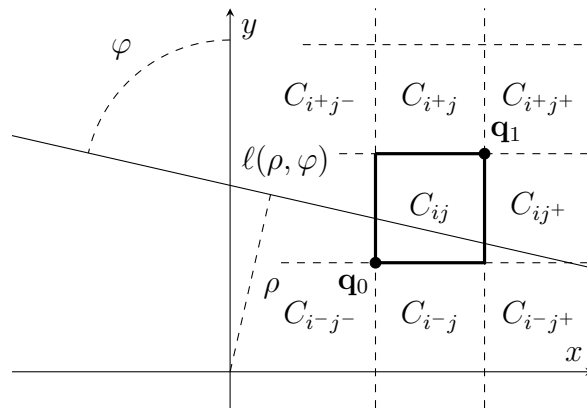


Figure 10: Illustration af en linje $\ell(\rho, \varphi)$ der går gennem en celle C_{ij} . Notationen i^\pm her er en forkortelse for $i \pm 1$; ligeledes for j .

Bemærk, hvordan hver summeringslinje gennem gitteret i figuren svarer til en række i \mathbf{A} og hver søjle til en celle i gitteret. Kun de krydsede celler giver ikke-nul indgange. Det er helt klart, at en matrix som denne vil være meget sparsom (mest nuller). Det, vi vil søge her, er meget lignende, selvom - som nævnt i det foregående afsnit - linjerne har mere frihed i deres placering, og matrix-elementerne vil være proportionale med længden af linjesegmenterne, der skærer cellerne.

For at finde \mathbf{A} skal vi først finde vekselvirkningerne mellem vores "stråler" $\ell(\rho, \theta)$ og de individuelle celler i vores gitter.

Opgave 31. Givet linjen $\ell(\rho, \varphi)$ og cellen C_{ij} , lad $\mathbf{q}_0 = (x_0, y_0)$ og $\mathbf{q}_1 = (x_1, y_1)$ være henholdsvis nederste venstre og øverste højre hjørne af C_{ij} , se Figur 10. Bestem en måde at kontrollere, om linjen $\ell(\rho, \varphi)$ går gennem C_{ij} .

Opgave 32. Antag, at linjen $\ell(\rho, \varphi)$ går gennem cellen C_{ij} . Bestem længden af det linjestykke, der går gennem C_{ij} .

Opgave 33. Skriv påbaggrund af dine løsninger ovenfor en funktion `intersect_cell(i, j, a, N, rho, theta)` i Python, som tjekker om linjen $\ell(\rho, \theta)$ skærer cellen C_{ij} .

Opgave 34. Skriv påbaggrund af dine løsninger ovenfor en funktion `get_length(i, j, a, N, rho, theta)` i Python, som, hvis linjen $\ell(\rho, \theta)$ krydser cellen C_{ij} , beregner længden af linjestykket i cellen.

Antag, at vi har mærket alle strålelinjer $\ell_k \equiv \ell(\rho_k, \theta_k)$, $1 \leq k \leq M$. Lad $s_{ij,k}$ være længden af segmentet af linje k der går gennem cellen C_{ij} , så kan vi konstruere en matrix, i hvilken hver række svarer til en enkelt "stråle", dvs

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_{11,1} & s_{12,1} & \cdots & s_{1N,1} & s_{21,1} & \cdots & s_{NN,1} \\ s_{11,2} & s_{12,2} & \cdots & s_{1N,2} & s_{21,2} & \cdots & s_{NN,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{11,M} & s_{12,M} & \cdots & s_{1N,M} & s_{21,M} & \cdots & s_{NN,M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N^2 \times M}$$

og vi kan betragte ligningen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ som Radon–transformationen af funktionen $f \in V$ svarende til \mathbf{x} ifølge ligningerne (6)-(7).

Opgave 35. Hvad kan vi lære af denne observation, når vi bemærker, at antallet af stråler svarer til antallet af rækker i \mathbf{A} ?

Opgave 36. Opskriv en funktion, som frembringer matrixen \mathbf{A} givet a , N og lister over forskellige (ρ_1, ρ_2, \dots) og $(\theta_1, \theta_2, \dots)$.

En advarsel Hvis man antager, at der er N stråler fra N forskellige vinkler på et gitter af størrelse $N \times N$, er det indlysende, at A vil have N^4 elementer, hvilket viser en hurtig vækst i problemstørrelse. Det bør være klart, at ethvert naivt forsøg på at bygge matrixen A element for element kan blive meget tidskrævende, når N stiger; hvis det tager kun 1 sekund at beregne A for $N = 10$, som allerede har 10^4 elementer at beregne, så vil $N = 100$ tage noget nær tre timer.

Et godt valg her er Python med bibliotek NUMPY.

5.3 Løsning af det lineære system

Som vi har set ovenfor kommer vi frem til en ligning for vektoren x i form af matrixen A og højre side b

$$Ax = b.$$

Oftest er matrixen ikke invertibel, og så er en almindelig tilgang at bruge ”mindste kvadraters metode” for at finde et rimeligt x . Betragt funktionen

$$J(x) = \|Ax - b\|^2.$$

Opgave 37. Beregn gradienten $\nabla J(x)$ og udled følgende ligning for de stationære punkter

$$A^T Ax = A^T b.$$

Denne ligning kaldes også normalligningen. Ligningen er især nyttig, hvis $A^T A$ er invertibel.

Opgave 38. Vis, at matrixen $A^T A$ er symmetrisk, og at egenverdierne er ikke-negative.

Hvis $A^T A$ ikke er invertibel, er en almindelig tilgang at ”løfte” egenverdierne med et lille tal $\lambda > 0$, som opnås ved at erstatte $A^T A$ med $(A^T A + \lambda I)$ i ovenstående ligning, dvs.

$$(A^T A + \lambda I)x = A^T b. \quad (9)$$

Opgave 39. Vis, at normalligningen (9) svarer til en ligning for stationære punkter af funktionen

$$J_\lambda(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda\|x\|^2.$$

Opgave 40. Anvend andenordenstesten for Hesse-matricen for at vise, at en løsning til (9) faktisk er et minimum af J_λ .

Opgave 41. Eksperimenter med at implementere $A^T A$ og $(A^T A + \lambda)$ i Python som ovenfor.

5.4 Datasæt-udfordring

I virkelige anvendelser bestemmes matricen A af skannings-geometrien og opsætningen, vektoren b måles, og målet for os er at beregne x . Senere i projektperioden vil vi specificere konkrete A, b og udfordre dig til at finde x 'et. Spørg din vejleder for detaljer!